Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

$$\text{Låt}\quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix} \in R^m \qquad ,\ldots, \qquad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in R^m, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \in R^m$$

vara givna vektorer.

Vi frågar: Ligger $\mathbf{b}$ i det linjära höljet av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, dvs i Span$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$? Vi frågar alltså om det finns skalärer $x_1, \ldots, x_n$ sådana att

$$x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}? \tag{1}$$

Denna ekvation kan vi skriva

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \qquad \ldots \qquad + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

Enligt definitionerna av multiplikation av en vektor med en skalär och addition av vektorer blir ekvation (2)

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + & \ldots & +a_{1n}x_n \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1}x_1 + & \ldots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

Om vi inför matriserna

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n$$

kan vi enligt definitionen av multiplikation av matriser slutligen skriva ekvation (3) som matrisekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4}$$

och detta är naturligtvis enligt (3) inget annat än ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \ldots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \\ \cdot & \ldots & \cdot & \\ a_{m1}x_1 + & \ldots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array} \right. \tag{5}$$