

## LÄSANVISNINGAR CHAPTER 6

### SECTION 6.1

The **inner product** of  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$ , som ofta betecknas  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , kallas **inre produkten** eller **skalärprodukten** av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  och i det fall att  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$  talar vi om **standardskalärprodukten** på  $\mathbf{R}^n$ . På engelska är det också naturligt att säga **the standard inner product**. Med hjälp av den inre produkten kan vi införa begreppen **längd**, **ortogonalitet** och **vinkel** i våra vektorrum, dvs vi kan nu *geometrisera* rummen.

*Övningar:* 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31

**Ledning:** Exercise 24 V.G.V!

### SECTION 6.2

THEOREM 5 förklarar varför vi tycker om ortogonala baser. Avsnittet

**An Orthogonal Projection** på sidan 386ff är viktigt. Observera betydelsen av **orthogonal matrix** på sidan 391. En sådan har alltså **ortonormala kolonner** och automatiskt, ortonormala rader.

*Övningar:* 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32

### SECTION 6.3

THEOREM 9 **The Best Approximation Theorem** visar att ortogonala projektioner måste vara exceptionellt viktiga inom vetenskapen.

*Övningar:* 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 23, 24

**Ledning:** Exercises 23, 24 V.G.V!

### SECTION 6.4

Notera vad Davis Lay säger före EXEMPEL 2. "Study it carefully." **QR Factorization of Matrices** är överkurs men helt oemotståndligt.

*Övningar:* 1, 3, 5, 7, 9, 11 *Övningar på QR factorization:* 13, 15, 19, 20

### SECTION 6.7

**Inner Product Spaces** är bokens viktigaste avsnitt. Differentialgeometri, allmän relativitetsteori mm mm skulle inte finnas i den utsökta form vi har idag om vi inte hade denna generalisering av "the standard inner product".

*Övningar:* 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 25

### Supplementary Exercises

2, 3, 4, 5, 6, 7, 13

**Ledning:** Supplementary Exercise 6 V.G.V!

**Ledning:** Ch 6.1 Exercise 24

$$\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \pm \mathbf{v})$$

**Ledning:** Ch 6.3 Exercise 23

Använd Theorem 3 och the Orthogonal Decomposition Theorem. För entydigheten, antag att  $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$  och  $A\mathbf{p}_1 = \mathbf{b}$  och betrakta ekvationerna  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)$  och  $\mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{0}$ .

**Ledning:** Ch 6.3 Exercise 24

a) Enligt förutsättningen är vektorerna  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p$  parvis ortogonala och även vektorerna  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$  är parvis ortogonala. Vidare är  $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$  för varje  $i$  och  $j$  eftersom alla  $\mathbf{v}$  är i det ortogonala komplementet av  $W$ .

b) För varje  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$  kan vi enligt the Orthogonal Decomposition Theorem skriva  $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$  där  $\hat{\mathbf{y}} \in W$  och  $\mathbf{z} \in W^\perp$ . Då finns det skalärer  $c_1, \dots, c_p$  och  $d_1, \dots, d_q$  så att

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} = c_1\mathbf{w}_1 + \dots + c_p\mathbf{w}_p + d_1\mathbf{v}_1 + \dots + d_q\mathbf{v}_q$$

Alltså gäller att  $\text{Span}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\} = \mathbf{R}^n$ .

c) Mängden  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$  är linjärt oberoende enligt (a) och spänner  $\mathbf{R}^n$  enligt (b) och är alltså en bas för  $\mathbf{R}^n$ . Alltså får vi

$$\dim W + \dim W^\perp = p + q = \dim \mathbf{R}^n = n$$

**Ledning:** Supplementary Exercise 6

Om  $U\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  för något  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  så gäller enligt Theorem 7(a) och normens egenskaper att

$$\|\mathbf{x}\| = \|U\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|,$$

vilket visar att  $|\lambda| = 1$  eftersom  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .