Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

LINJÄR ALGEBRA MN1
Vårterminen 2005

LÄSANVISNINGAR CHAPTER 6

SECTION 6.1

The **inner product** of **u** and **v**, som ofta betecknas $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, kallas **inre produkten** eller **skalärprodukten** av **u** och **v** och i det fall att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$ talar vi om **standardskalärprodukten** på $\mathbf{R}^n$. På engelska är det också naturligt att säga **the standard inner product.** Med hjälp av den inre produkten kan vi införa begreppen **längd**, **ortogonalitet** och **vinkel** i våra vektorrum, dvs vi kan nu *geometrisera* rummen.

Övningar: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31
Ledning: Exercise 24 V.G.V!

SECTION 6.2

THEOREM 5 förklarar varför vi tycker om ortogonala baser. Avsnittet
An Orthogonal Projection på sidan 386ff är viktigt. Observera betydelsen av **orthogonal matrix** på sidan 391. En sådan har alltså **ortonormala kolonner** och automatiskt, ortonormala rader.

Övningar: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32

SECTION 6.3

THEOREM 9 **The Best Approximation Theorem** visar att ortogonala projektioner måste vara exceptionellt viktiga inom vetenskapen.

Övningar: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 23, 24
Ledning: Exercises 23, 24 V.G.V!

SECTION 6.4

Notera vad David Lay säger före EXEMPEL 2. “Study it carefully.” **QR Factorization of Matrices** är överkurs men helt oemotståndligt.

Övningar: 1, 3, 5, 7, 9, 11 *Övningar på QR factorization*: 13, 15, 19, 20

SECTION 6.7

Inner Product Spaces är bokens viktigaste avsnitt. Differentialgeometri, allmän relativitetsteori mm mm skulle inte finnas i den utsökta form vi har idag om vi inte hade denna generalisering av “the standard inner product”.

Övningar: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 25

Supplementary Exercises

2, 3, 4, 5, 6, 7, 13

Ledning: Supplementary Exercise 6 V.G.V!

Ledning: Ch 6.1 Exercise 24

$||\mathbf{u} \pm \mathbf{v}||^2 = (\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \pm \mathbf{v})$

Ledning: Ch 6.3 Exercise 23

Använd Theorem 3 och the Orthogonal Decomposition Theorem. För entydigheten, antag att $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ och $A\mathbf{p_1} = \mathbf{b}$ och betrakta ekvationerna $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)$ och $\mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{0}$.

Ledning: Ch 6.3 Exercise 24

a) Enligt förutsättningen är vektorerna $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p$ parvis ortogonala och även vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q$ är parvis ortogonala. Vidare är $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ för varje i och j eftersom alla $\mathbf{v}$ är i det ortogonala komplementet av W.

b) För varje $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ kan vi enligt the Orthogonal Decomposition Theorem skriva $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$ där $\hat{\mathbf{y}} \in W$ och $\mathbf{z} \in W^{\perp}$. Då finns det skalärer $c_1, \ldots, c_p$ och $d_1, \ldots, d_q$ så att

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} = c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_p\mathbf{w}_p + d_1\mathbf{v}_1 + \ldots + d_q\mathbf{v}_q$$

Alltså gäller att $\quad \text{Span}\,\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\} = \mathbf{R}^n$.

c) Mängden $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ är linjärt oberoende enligt (a) och spänner $\mathbf{R}^n$ enligt (b) och är alltså en bas för $\mathbf{R}^n$. Alltså får vi

$$\dim W + \dim W^{\perp} = p + q = \dim \mathbf{R}^n = n$$

Ledning: Supplementary Exercise 6

Om $U\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ för något $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så gäller enligt Theorem 7(a) och normens egenskaper att

$$||\mathbf{x}|| = ||U\mathbf{x}|| = ||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda|||\mathbf{x}||,$$

vilket visar att $|\lambda| = 1$ eftersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.