Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

LINJÄR ALGEBRA MN1
LÄSANVISNINGAR
CHAPTER 7

SECTION 7.1

I Ch 5 fann vi endast en sats med *tillräckliga* villkor för att en $n \times n$ matris är diagonaliserbar, nämligen då den har n olika egenvärden och sådana matriser är ju väldigt speciella. I Ch 7 däremot visar det sig att en stor klass av matriser faktiskt är garanterat diagonaliserbara, tom ortogonalt diagonaliserbara, nämligen de *symmetriska* matriserna. Detta är innehållet i den fundamentala **Spectral Theorem for Symmetric Matrices**. Det är viktigt att observera att egenvektorer som då hör till *olika* egenvärden är automatiskt ortogonala, men att man i varje egenrum av dimension större än ett själv måste skapa en ortogonal bas av egenvektorer, t ex med Gram-Schmidt. I dessa sammanhang förekommer ofta **ortogonala matriser**. Observera att de har **ortonormala** kolonner och **ortonormala** rader. I Ch 6.2 står det: An **orthogonal matrix** is a square invertible matrix U such that $U^{-1} = U^T$. Det är alltså jättelätt att invertera en ortogonal matris! Det är bara att spegla matrisen i huvuddiagonalen.

Övningar: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 28, 29, 30, 31, 32

SECTION 7.2

Vilken är den geometriska tolkningen av kurvorna

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 48 \quad \text{och} \quad x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 = 16?$$

Genom att vrida koordinatsystemen så att dess axlar kommer att ligga längs respektive kurvas axlar blir det lätt att studera kurvorna. Denna teknik är fundamental och är innebörden av **The Principal Axes Theorem.**

Övningar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15[**M**], 17[**M**], 23, 24

SECTION 7.3

Från analysen är vi vana att söka maximum och minimum genom att derivera. När det gäller kvadratiska former kan vi lösa extremvärdesproblem tom med bivillkor genom diagonalisering.

Övningar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Supplementary Exercises

4, 5

Svar till jämna problem

V.G.V!

Svar Section 7.2

2. a. $4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$ **b.** 21 **c.** 5

4. a. $\begin{bmatrix} 20 & 7.5 \\ 7.5 & -10 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & .5 \\ .5 & 0 \end{bmatrix}$

6. a. $\begin{bmatrix} 5 & 5/2 & -3/2 \\ 5/2 & -1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

8. $P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 15y_1^2 + 9y_2^2 + 3y_3^2$

10. Positivt definit; egenvärdena är 11 och 1

Variabelbytet: $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Ny kvadratisk form: $11y_1^2 + y_2^2$

12. Negativt definit; egenvärdena är -1 och -6

Variabelbytet: $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ny kvadratisk form: $-y_1^2 - 6y_2^2$

14. Indefinit; egenvärdena är 9 och -1

Variabelbytet: $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där $P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Ny kvadratisk form: $9y_1^2 - y_2^2$

Svar Section 7.3

2. $\mathbf{x} = P\mathbf{y}, P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

4. a. 5 **b.** $\pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ **c.** 2

6. a. $\frac{15}{2}$ **b.** $\pm\begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ **c.** $\frac{5}{2}$

8. Varje enhetsvektor som är ortogonal mot $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **10.** $1 + \sqrt{17}$