Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

LINJÄR ALGEBRA MN1
Vårterminen 2005

LÄSANVISNINGAR CHAPTER 7

SECTION 7.1

I Ch 5 finns endast en sats med *tillräckliga* villkor för att en $n \times n$ matris är diagonaliserbar, nämligen då den har n olika egenvärden. I Ch 7 framgår att en stor klass av matriser är garanterat diagonaliserbara, tom ortogonalt diagonaliserbara, nämligen de *symmetriska* matriserna. Detta är innehållet i den fundamentala **Spectral Theorem for Symmetric Matrices**. Det är då viktigt att observera att egenvektorer som hör till *olika* egenvärden är automatiskt ortogonala, men att man i varje egenrum av dimension större än ett själv måste skapa en ortogonal bas av egenvektorer, t ex med Gram-Schmidt. Observera att **ortogonala matriser** har **ortonormala** kolonner och **ortonormala** rader. Då U är ortogonal är $U^{-1} = U^T$. Det är alltså lätt att invertera en ortogonal matris! Det är bara att spegla matrisen i huvuddiagonalen.

Övningar: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 36 Ledning: Se nedan

SECTION 7.2

Genom att vrida ett koordinatsystem så att dess axlar kommer att ligga längs symmetriaxlarna av en kurva eller yta blir det lättare att studera objektet. Denna teknik är fundamental och är innebörden av **The Principal Axes Theorem**.

Övningar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15[**M**], 17[**M**], 23, 24

SECTION 7.3

Från analysen är vi vana att söka maximum och minimum genom att derivera. När det gäller kvadratiska former kan vi lösa extremvärdesproblem tom med bivillkor genom diagonalisering.

Övningar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Supplementary Exercises: 4, 5

Ledning: Exercise 36, Section 7.1 Givet $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, låt $\hat{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ och $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$. Antag $B^T = B$ och $B^2 = B$. Då är $B^T B = BB = B$.

a. $\mathbf{z} \cdot \hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{y} - B\mathbf{y}) \cdot (B\mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot (B\mathbf{y}) - (B\mathbf{y}) \cdot (B\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T B\mathbf{y} - (B\mathbf{y})^T B\mathbf{y} = \mathbf{y}^T B\mathbf{y} - \mathbf{y}^T B^T B\mathbf{y} = 0$ så $\mathbf{z}$ är ortogonal mot $\hat{\mathbf{y}}$.

b. Varje vektor i $W = \text{Col } B$ har formen $B\mathbf{u}$ för något $\mathbf{u}$. $B^T = B$ så Exercise 28 ger

$$(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \cdot B\mathbf{y} = [B(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})] \cdot \mathbf{u} = [B\mathbf{y} - BB\mathbf{y}] \cdot \mathbf{u} = 0$$

då $B^2 = B$. Så $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \in W^{\perp}$ och $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ ger $\mathbf{y}$ som summan av en vektor i W och en vektor i $W^{\perp}$. Enligt the Orthogonal Decomposition Theorem i Section 6.3 är denna summa entydig, så $\hat{\mathbf{y}}$ måste vara $\text{proj}_W \mathbf{y}$.

Svar till jämna problem Ch 7.2 och 7.3 V.G.V!

Svar Section 7.2

2. a. $4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$ **b.** 21 **c.** 5 **4. a.** $\begin{bmatrix} 20 & 7.5 \\ 7.5 & -10 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & .5 \\ .5 & 0 \end{bmatrix}$

6. a. $\begin{bmatrix} 5 & 5/2 & -3/2 \\ 5/2 & -1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

8. $P = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 15y_1^2 + 9y_2^2 + 3y_3^2$

10. Positivt definit; egenvärdena är 11 och 1

Variabelbytet: $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Ny kvadratisk form: $11y_1^2 + y_2^2$

12. Negativt definit; egenvärdena är -1 och -6

Variabelbytet: $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ny kvadratisk form: $-y_1^2 - 6y_2^2$

14. Indefinit; egenvärdena är 9 och -1

Variabelbytet: $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där $P = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Ny kvadratisk form: $9y_1^2 - y_2^2$

Svar Section 7.3

2. $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ **4. a.** 5 **b.** $\pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ **c.** 2

6. a. $\dfrac{15}{2}$ **b.** $\pm\begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ **c.** $\dfrac{5}{2}$ **8.** Varje enhetsvektor som är ortogonal mot $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

10. $1 + \sqrt{17}$