Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
T Erlandsson, E. Darpö, A. Neuman
D. Preve

TENTAMEN 2002-03-18
Linjär algebra MN1
VT 2002

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Alla $h$
2. $h = 2$
3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
5. $h = 1$
6. En skojig bas för nollrummet är $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
7. 3
8. En bas är t ex $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$
9. 0
10. 1
11. För alla $h \neq 1$
12. T ex $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$
13. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
14. $\mathbf{u}_1$
15. 1
16. $\sqrt{2}$

17. $h = 1$

18. $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

19. 1

20. $P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

1. $n = 4$, $m = 2$, rank $A = 1$, en bas för Col $A$ är tex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och en skojig bas för Nul $A$ är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som till och med är ortogonal.

2. Beräkning ger $A\mathbf{v_1} = 2\mathbf{v_1}$, $A\mathbf{v_2} = 2\mathbf{v_2}$, $A\mathbf{v_3} = 2\mathbf{v_3}$, $A\mathbf{v_4} = 0\mathbf{v_4}$. $A$ har alltså ett egenvärde $\lambda = 2$ av multiplicitet 3 och ett egenvärde $\lambda = 0$ av multiplicitet 1. Egenvektorerna är ortogonala. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Inversen $P^{-1} = P^T$.

3. dim $W^\perp$ =dim $\mathbf{P}_1$−dim $W$= 2-1=1. Låt $\hat{1}$ vara den ortogonala projektionen av 1 på $t$. En bas för $W^\perp$ är $1 - \hat{1} = 1 - \dfrac{<1, t>}{<t, t>} t = 1 - \dfrac{1}{1} t = 1 - t$.

4. Kvadratiska formens matris $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Egenvärdena är 3 och $-1$. $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Den nya kvadratiska formen är $\mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 3y_1^2 - y_2^2$. Hyperbelns skärningspunkter med $y_1$-axeln, som är en principalaxel, är $(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ i $y_1y_2$−systemet. Dessa svarar mot $(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}})$ och $(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}})$ i $x_1x_2$-systemet.

1. $2 \pm i$

2. $\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = 1,\ \sigma_3 = 0$