Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, E. Darpö, A. Neuman,
D. Preve

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2002-06-07

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges, 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar samt 2 EXTRAPROBLEM (max 1 poäng per problem) till vilka endast svar ska ges. För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng. För ES-programmet gäller sedvanliga betygsgränser.
Skrivtid: 8-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på h är vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}$ linjärt beroende?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} h \\ 1 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

   För vilka värden på h ligger $\mathbf{y}$ i värderummet av T (the range of T)?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning (transformation) som definieras av en rotation $\pi/4$ radianer moturs. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning (transformation) sådan att

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4).$$

   Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} h \\ h \\ -h \end{bmatrix}$. För vilka värden på h gäller att $\mathbf{w}$ tillhör nollrummet Nul A?

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vad är dimensionen av nollrummet Nul A?

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ är radekvivalent med $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Bestäm en bas för kolonnrummet Col A.

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvektorn $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Vad är motsvarande egenvärde?

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda = 1$ av multipliciteten 3. Vad är dimensionen av egenrummet hörande till detta egenvärde?

11. För vilka värden på h är $A = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h & h \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en tredje egenvektor $\mathbf{v}_3$ till A så att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ blir en bas av egenvektorer för $\mathbf{R}^3$.

13. Låt $W = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$.

14.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på det delrum W som spänns av vektorerna $\mathbf{u_1}$ och $\mathbf{u_2}$.

15. $\mathbf{P}_1$ är rummet av polynom av grad högst ett inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_1$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(1)q(1) \tag{1}$$

Beräkna $< p, q >$ då $p(t) = 1 - t$ och $q(t) = 1 + t$.

16. Vad är normen av polynomet $p(t) = 1$, dvs $\sqrt{< p, p >}$, med avseende på den inre produkten (1)?

17. För vilka värden på h är $A = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonalt diagonaliserbar?

18.
$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas för egenrummet hörande till egenvärdet 2.

19. Grafen av ekvationen $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1$ är en ellips. Bestäm minsta avståndet till origo från en punkt på ellipsen.

20. Vid variabelbytet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

transformeras den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = -5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$$

till en ny kvadratisk form utan blandande termer (cross-product terms). Bestäm den nya kvadratiska formen.

PROBLEM

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ definierar en avbildning (transformation) $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm n och m, rangen av matrisen A, en bas för kolonnrummet Col A samt en bas för nollrummet Nul A.

2. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{2}$$

Låt $W = \text{Span}\{1\}$ i $\mathbf{P}_2$ och $W^\perp$ det ortogonala komplementet med avseende på den inre produkten (2). Bestäm en bas för $W^\perp$.

3. Grafen av ekvationen $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 1$ är en ellips. Bestäm koordinaterna i x_1x_2-systemet för de fyra punkter där ellipsen skär sina principalaxlar.

4. För vilka värden på h är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 1 & h \end{bmatrix}$$

diagonaliserbar? Bestäm för varje sådant värde på h en inverterbar matris P och en diagonalmatris D så att

$$A = PDP^{-1}.$$

EXTRA PROBLEM

1. Om a och b $(b \neq 0)$ är reella har $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ de komplexa egenvärdena $a \pm bi$. En egenvektor som svarar mot $a + bi$ är $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. Ange en egenvektor som svarar mot $a - bi$?

2. Vad är de singulära värdena av matrisen $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$?