Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, E. Darpö, A. Neuman
D. Preve

TENTAMEN 2002-06-07
Linjär algebra MN1
VT 2002

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $h = 0$
2. För alla h
3. $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
5. För alla h
6. En skojig bas för nollrummet är $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
7. 3
8. En bas är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$
9. 5
10. 1
11. $h = 0$
12. T ex $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
13. T ex $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
14. $\mathbf{y}$
15. 0
16. $\sqrt{2}$

17. $h = 1$

18. $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

19. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

20. $-y_1^2 - 6y_2^2$

1. $n = 2$, $m = 4$, rank $A = 1$, en bas för Col A är tex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och en bas för Nul A är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. dim $W^\perp$ =dim $\mathbf{P}_2-$dim W= 3-1=2. Låt $p(t) = a + bt + ct^2 \in W^\perp$ vilket är ekvivalent med att $0 =< p, 1 >= a - b + c + a + a + b + c = 3a + 2c$. $b = 1$ respektive $a = 2, c = -3$ ger basen $\{t, 2 - 3t^2\}$ för $W^\perp$.

3. Kvadratiska formens matris $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Egenvärdena är 3 och 7. $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Den nya kvadratiska formen är $\mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 3y_1^2 + 7y_2^2$. Ellipsens skärningspunkter med y_1-axeln, som är en principalaxel, är $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ i y_1y_2-systemet. Dessa svarar mot $\pm(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ i x_1x_2-systemet. Ellipsens skärningspunkter med den andra principalaxeln, dvs y_2-axeln, blir på samma sätt $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{7}})$, dvs $\pm(-\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}})$ i x_1x_2-systemet.

4. Egenvärdena är 0 och $1 + h$ som är olika för $h \neq -1$. Alltså är A diagonaliserbar för $h \neq -1$, tom ortogonalt diagonaliserbar för $h = 1$ eftersom A då är symmetrisk. Om $h = -1$ är egenvärdet dubbelt och $\dim E(0) = 1$, dvs A är ej diagonaliserbar för $h = -1$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -h \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} h+1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h \neq -1.$$

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

2. $\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = 1$