Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, E. Darpö, A. Neuman,
D. Preve

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2002-08-13

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges, 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar samt 2 EXTRAPROBLEM (max 1 poäng per problem) till vilka endast svar ska ges. För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng. För ES-programmet gäller sedvanliga betygsgränser.
Skrivtid: 9-14 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på h är vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} h \\ h \end{bmatrix}$ linjärt beroende?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} h & 2h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

   För vilka värden på h är dimensionen av värderummet av T (the range of T) $= 1$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning (transformation) som definieras av en rotation $\pi/4$ radianer moturs. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ vara en linjär avbildning (transformation) sådan att

$$T(x_1, x_2) = (x_1, 0, x_2, 0).$$

   Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} h & h \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. För vilka värden på h gäller att nollrummet Nul A har dimensionen $= 1$?

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. Om A är en 6×8 matris, dvs en matris med 6 rader och 8 kolonner, vad är då den minsta möjliga dimensionen av nollrummet Nul A?

8. Om A är en 6×8 matris, dvs en matris med 6 rader och 8 kolonner, vad är då den största möjliga rangen av A?

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvektorn $\begin{bmatrix} h \\ 6 \end{bmatrix}$ och motsvarande egenvärde är 0. Vad är h?

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda = 0$ av multipliciteten 3. Vad är dimensionen av egenrummet hörande till detta egenvärde?

11. För vilka värden på h är $A = \begin{bmatrix} 0 & h & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en tredje egenvektor $\mathbf{v}_3$ till A så att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ blir en bas av egenvektorer för $\mathbf{R}^3$.

13. Låt $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$.

14.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på det delrum W som spänns av vektorerna $\mathbf{u_1}$ och $\mathbf{u_2}$.

15. $\mathbf{P}_1$ är rummet av polynom av grad högst ett inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_1$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) \tag{1}$$

Beräkna $< p, q >$ då $p(t) = 1$ och $q(t) = 1 + t$.

16. Vad är normen av polynomet $p(t) = 1 + t$, dvs $\sqrt{< p, p >}$, med avseende på den inre produkten (1)?

17. För vilka värden på h är $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & h & 2 \end{bmatrix}$ ortogonalt diagonaliserbar?

18.

$$A = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas för egenrummet hörande till egenvärdet 3.

19. Grafen av ekvationen $x_1x_2 = 1$ är en hyperbel. Bestäm minsta avståndet till origo från en punkt på hyperbeln.

20. Vid variabelbytet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

transformeras den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$$

till en ny kvadratisk form utan blandande termer (cross-product terms). Bestäm den nya kvadratiska formen.

PROBLEM

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ definierar en avbildning $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm en bas för kolonnrummet Col A och en bas för nollrummet Nul A. Bestäm även en bas för det delrum av $\mathbf{R}^4$ som avbildas på värderummet av T.

2. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten
$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{2}$$
Låt $p_0(t) = 1,\ p_1(t) = t$ och $p_2(t) = t^2$. Bestäm den ortogonala projektionen av p_2 på det delrum som spänns av p_0 och p_1.

3. En ellips med ekvationen
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$
innesluter en yta med arean πab. Grafen av ekvationen $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 1$ är en ellips. Bestäm arean av denna ellips.

4. För vilka värden på h är
$$A = \begin{bmatrix} h & h \\ h & h \end{bmatrix}$$
ortogonalt diagonaliserbar? Bestäm för varje sådant värde på h en ortogonal matris P och en diagonalmatris D så att
$$A = PDP^{-1}.$$

EXTRA PROBLEM

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ har en egenvektor $\begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas av egenvektorer för $\mathbf{C}^2$.

2. Vad är de singulära värdena av matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?