Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, E. Darpö, A. Neuman
D. Preve

TENTAMEN 2002-08-13
Linjär algebra MN1
VT 2002

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. För alla h
2. $h \neq 0$
3. $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
5. För alla h
6. En skojig bas för nollrummet är $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
7. 2
8. 6
9. $h = 3$
10. 1
11. För alla h (Alltid tre olika egenvärden 0, 1, 2)
12. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
13. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
14. $\mathbf{y}$
15. 1
16. 1

17. $h = 1$

18. $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

19. $\sqrt{2}$

20. $10y_1^2$

1. En bas för Col A är tex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och en bas för Nul A är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En bas för det delrum av $\mathbf{R}^4$ som avbildas på värderummet av T kan väljas som en bas för radrummet, dvs t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Eftersom $< p_0, p_1 >= 0$ ges den ortogonala projektionen av
$$\frac{< p_2, p_0 >}{< p_0, p_0 >} p_0 + \frac{< p_2, p_1 >}{< p_1, p_1 >} p_1 = \frac{2}{3}.$$

3. Kvadratiska formens matris $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. Egenvärdena är 7 och 2 och ellipsens ekvation blir i ett nytt ON-system
$$7y_1^2 + 2y_2^2 = 1.$$
Ellipsens halva principalaxlar har därför längden $\frac{1}{\sqrt{7}}$ respektive $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ellipsens area blir $\frac{\pi}{\sqrt{14}}$.

4. A är ortogonalt diagonaliserbar för alla h eftersom A är symmetrisk. Egenvärdena är 0 och $2h$ som är olika för $h \neq 0$. Om $h = 0$ är egenvärdet dubbelt men $\dim E(0) = 2$ eftersom A är diagonaliserbar även för $h = 0$. För alla h kan man välja
$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. $\begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = 0$