Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, P. Leitz, R. Strand

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2003-03-17

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges, 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar samt 2 EXTRAPROBLEM (max 1 poäng per problem) till vilka endast svar ska ges. För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng. För ES-programmet gäller sedvanliga betygsgränser.
Skrivtid: 8-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på h är de **tre** vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 4 \\ h \\ h \end{bmatrix}$ linjärt beroende?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} h & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
   För vilka värden på h har värderummet av T dimensionen lika med 1?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en spegling i linjen $x_1 = x_2$ åtföljd av en rotation $\pi/4$ radianer moturs. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2,\, x_2 + x_3).$$
   Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}$. För vilka värden på h har nollrummet Nul A dimensionen $= 2$?

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För vilka värden på c är de tre polynomen $1+t$, $1+t^2$ och $t+ct^2$ i $\mathbf{P}_2$ linjärt beroende?

8. Definiera $W = \text{Span}\{1+t,\, 1-t,\, 1+t^2,\, 1-t^2,\, t+t^2,\, t-t^2\}$ som det delrum av $\mathbf{P}_2$ som spänns av dessa sex polynom. Vad är dimensionen av W?

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vad är motsvarande egenvärde?

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda = 0$ av multipliciteten 2. Vad är dimensionen av egenrummet hörande till detta egenvärde?

11. För vilka värden på k är $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en tredje egenvektor $\mathbf{v}_3$ till A så att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ blir en bas av egenvektorer för $\mathbf{R}^3$.

13. Låt $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$.

14.
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på det delrum W som spänns av vektorerna $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ och $\mathbf{u_3}$.

15. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{1}$$

Bestäm den ortogonala projektionen av t^2 på $W = \text{Span}\{1\}$.

16. Vad är normen av polynomet $p(t) = t^2 - 1$, dvs $||p|| = \sqrt{< p, p >}$, med avseende på den inre produkten (1)?

17. För vilka värden på h är $A = \begin{bmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & 1 & h \end{bmatrix}$ ortogonalt diagonaliserbar?

18.
$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas för egenrummet hörande till egenvärdet 3.

19. Grafen av ekvationen $2x_1^2 + 2x_1x_2 = 1$ är en hyperbel. Bestäm minsta avståndet till origo från en punkt på hyperbeln.

20. Vid variabelbytet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

transformeras den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

till en ny kvadratisk form utan blandande termer (cross-product terms). Bestäm den nya kvadratiska formen.

PROBLEM

1. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara en linjär avbildning sådan att

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2,\ x_2 - x_3,\ -x_2 + x_3).$$

   Bestäm en bas för värderummet och en bas för nollrummet av T.

2. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{2}$$

   Låt $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = t^2$. Bestäm avståndet från p_2 till det delrum som spänns av p_0 och p_1.

3. För vilka värden på h är

$$A = \begin{bmatrix} h & h & h \\ h & h & h \\ h & h & h \end{bmatrix}$$

   ortogonalt diagonaliserbar? Bestäm för varje sådant värde på h en ortogonal matris P och en diagonalmatris D så att

$$A = PDP^{-1}.$$

4. En ellipsoid med ekvationen

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

   innesluter volymen $\dfrac{4\pi}{3}abc$. Ekvationen $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_2x_3 = 1$ bestämmer en ellipsoid. Beräkna volymen av denna.

EXTRA PROBLEM

1. Vad är projektionsmatrisen i homogena koordinater under en perspektiv projektion på x-axeln med projektionscentrum $(0, d)$?

2. Vad är de singulära värdena av matrisen $A = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$?