Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, P. Leitz, R. Strand

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2003-06-12

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges, 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar samt 2 EXTRAPROBLEM (max 1 poäng per problem) till vilka endast svar ska ges. För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng. För ES-programmet gäller sedvanliga betygsgränser.
Skrivtid: 8-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på h är de **tre** vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ linjärt beroende?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} h & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på h innehåller värderummet av T vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras av en spegling i planet $x_1 = 0$. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_4,\ x_1 + x_4).$$
Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}$. För vilka värden på h innehåller nollrummet Nul A vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $\mathbf{P}_4$ är rummet av polynom av grad högst fyra inklusive nollpolynomet. För vilka värden på c är de tre polynomen $1+t^4$, $1+t^2$ och $1+c\,t^2+t^4$ i $\mathbf{P}_4$ linjärt beroende?

8. Definiera $W = \text{Span}\{t^4+1,\, t^4-1,\, t^4+t,\, t^4-t\}$ som det delrum av $\mathbf{P}_4$ som spänns av dessa fyra polynom. Vad är dimensionen av W?

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde som är 0. Vad är dimensionen av egenrummet hörande till detta egenvärde?

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda = 0$ av multipliciteten 2. Bestäm en bas för egenrummet hörande till detta egenvärde?

11. För vilka värden på k är $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en spegling i linjen $x_1 = x_2$. Vilka egenvärden har T?

13. Låt $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$.

14.
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på det delrum W som spänns av vektorerna $\mathbf{u_1}$ och $\mathbf{u_2}$.

15. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$

Bestäm en ortogonal bas för det delrum W av $\mathbf{P}_2$ som spänns av polynomen $p_1(t) = 1$ och $p_2(t) = t$, dvs för $W = \text{Span}\{1, t\}$.

16. Vad är den ortogonala projektionen av t^2 på $W = \text{Span}\{1\}$ med avseende på den inre produkten (1)?

17. Den linjära avbildningen $D : \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$ definieras genom $D(a + bt + ct^2) = b + 2ct$. Vilka är avbildningens egenvärden?

18.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

där $0 < \theta < \pi$. Vilka egenvärden (reella) har matrisen A?

19. För vilka värden på a är grafen av ekvationen $2x_1^2 + 2ax_1x_2 = -1$ en hyperbel?

20. Vid variabelbytet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

transformeras den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

till en ny kvadratisk form utan blandande termer (cross-product terms). Bestäm den nya kvadratiska formen.

PROBLEM

1. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_1 + x_4)$$

Bestäm en bas för värderummet och en bas för nollrummet av T. Bestäm också en bas för det ortogonala komplementet till nollrummet.

2. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt \tag{2}$$

Låt $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = t^2$. Bestäm avståndet från p_0 till det delrum som spänns av p_1 och p_2.

3. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras av en spegling i linjen $x_1 = x_2 = x_3$. Låt A vara standardmatrisen av T. Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D så att

$$A = PDP^{-1}.$$

4. A är en 4×4 matris med tre olika egenvärden. Ett egenrum är en-dimensionellt och ett av de andra egenrummen är två-dimensionellt. Är det möjligt att A *inte* är diagonaliserbar? Motivera svaret noggrant.

EXTRA PROBLEM

1. Vad är projektionsmatrisen i homogena koordinater under en perspektiv projektion på xy-planet med projektionscentrum $(0, 0, d)$?

2. Vad är de singulära värdena av matrisen $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$?