Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2003-08-12

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges samt 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng. För ES-programmet gäller sedvanliga betygsgränser.
Skrivtid: 8-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på a är de **två** vektorerna $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ linjärt beroende i $\mathbf{R}$?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på a innehåller värderummet av T vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en spegling i linjen $x_1 = x_2$. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2) = (x_1,\, x_2,\, x_1,\, x_2).$$
Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \end{bmatrix}$. För vilka värden på a innehåller nollrummet Nul A vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $\mathbf{P}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ är rummet av polynom av grad högst n inklusive nollpolynomet. Låt $1 + t$, $1 - t$ vara en bas i $\mathbf{P}_1$. Vad är koordinaterna för polynomet 1 med avseende på denna bas?

8. Definiera $W = \text{Span}\{t^4,\ t^4 + 1,\ t^4 + t,\ t^4 + t^2,\ t^4 + t^3\}$ som det delrum av $\mathbf{P}_4$ som spänns av dessa fem polynom. Vad är dimensionen av W?

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde som är 0. Vad är dimensionen för egenrummet hörande till detta egenvärde?

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda = 0$ av multipliciteten 4. Bestäm en bas för egenrummet hörande till detta egenvärde.

11. För vilka värden på k är $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en spegling i planet $x_1 = 0$. Vilka egenvärden har T?

13. Låt $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$.

14.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på det delrum W som spänns av vektorerna $\mathbf{u_1}$ och $\mathbf{u_2}$.

15. $\mathbf{P}_3$ är rummet av polynom av grad högst tre inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_3$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$

Bestäm en ortogonal bas för det delrum W av $\mathbf{P}_3$ som spänns av polynomen $p_1(t) = 1$ och $p_2(t) = t^3$, dvs för $W = \text{Span}\{1, t^3\}$.

16. Vad är den ortogonala projektionen av t^3 på $W = \text{Span}\{t\}$ med avseende på den inre produkten (1)?

17. Den linjära avbildningen $D : \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$ definieras genom $D(a+bt+ct^2) = b+2ct$. Bestäm en bas för avbildningens nollrum?

18.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

där $0 < \theta < \pi$. Vilka egenvärden (reella) har matrisen A?

19. För vilka värden på a är grafen av ekvationen $x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2 = 1$ en ellips (inklusive en cirkel)?

20. Vid variabelbytet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

transformeras den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

till en ny kvadratisk form utan blandande termer (cross-product terms). Bestäm den nya kvadratiska formen.

PROBLEM

1. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\, x_1 + x_2,\, x_1 + x_2,\, x_1 + x_2)$$

Bestäm en bas för värderummet och en bas för nollrummet av T. Bestäm också en bas för det ortogonala komplementet till nollrummet.

2. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{2}$$

Låt $p_0(t) = t^2$, $p_1(t) = 1$ och $p_2(t) = t$. Bestäm avståndet från p_0 till det delrum som spänns av p_1 och p_2.

3. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras av en spegling i planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Låt A vara standardmatrisen av T. Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D så att

$$A = PDP^{-1}.$$

4. Visa att om $\mathbf{x}$ är en egenvektor till matrisprodukten AB och $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, så är $B\mathbf{x}$ en egenvektor till BA.