Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson

TENTAMEN 2003-08-12
Linjär algebra MN1
VT 2003

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Alla a
2. $a \neq 1$
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
5. $a = -2$
6. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
7. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
8. 5
9. 2
10. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
11. För inga värden på k
12. Egenvärdena är 1 och -1
13. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$
14. $\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

15. En ortogonal bas är $1, t^3$

16. $\dfrac{3}{5}t$

17. T ex det konstanta polynomet 1

18. Inga reella egenvärden

19. $-1 < a < 1$ ($a = 0$ ger en cirkel)

20. $-3y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2$

1. Avbildningens matris är $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Värderummet är Col A och nollrummet är Nul A.

   En bas för Col$A$ är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och en bas för Nul A är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Det ortogonala komplementet till nollrummet är radrummet som spänns av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Eftersom $< p_1, p_2 >= 0$ ges den ortogonala projektionen $\hat{p}_0$ av

$$\frac{< p_0, p_1 >}{< p_1, p_1 >} p_1 + \frac{< p_0, p_2 >}{< p_2, p_2 >} p_2 = \frac{1}{3} 1 + 0\,t = \frac{1}{3}.$$

   Avståndet är $||p_0 - \hat{p}_0|| = \sqrt{< t^2 - \frac{1}{3}, t^2 - \frac{1}{3} >} = \sqrt{\frac{8}{45}}$.

3. Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Normalens riktning och en ortogonal bas för planet ger en ortogonal bas av egenvektorer. Man kan t ex välja (efter normering)

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Om $\mathbf{x}$ är en egenvektor till matrisprodukten AB så gäller $(AB)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ där λ är ett reellt tal. Då är $BA(B\mathbf{x}) = B(AB\mathbf{x}) = B\lambda\mathbf{x} = \lambda(B\mathbf{x})$. Detta innebär att $B\mathbf{x}$ är egenvektor till BA om $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (Nollvektorn är aldrig egenvektor).