Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, J. Granström

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2004-03-17

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges samt 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 8-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på a är de **tre** vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ linjärt beroende i $\mathbf{R^3}$?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på a innehåller värderummet av T vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en moturs rotation omkring origo vinkeln $\pi/2$. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2) = (0,\, x_1,\, 0,\, x_2).$$
Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$. För vilka värden på a innehåller nollrummet Nul A vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $\mathbf{P}_n\,, n = 0, 1, 2, \ldots$ är rummet av polynom av grad högst n inklusive nollpolynomet. Definiera W som det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av mängden $S = \{\,1{+}2t{+}t^2,\ 1{-}2t{+}t^2\}$. För vilka värden på a ingår $1 + at + t^2$ i W?

8. Definiera W som det delrum av $\mathbf{P}_4$ som genereras av mängden

$$S = \{1,\ 1+t,\ 1-t,\ t+t^2,\ 1+t+t^2\}.$$

Vad är dimensionen av W?

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har ett egenvärdet $\lambda = 1$ av multipliciteten 2. Vad är dimensionen för egenrummet hörande till detta egenvärde?

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda = 1$ av multipliciteten 4. Bestäm en bas för egenrummet hörande till detta egenvärde.

11. För vilka värden på k är $A = \begin{bmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras som projektion på x_1-axeln. Vilka egenvärden har T?

13. Definiera W som det delrum av $\mathbf{R}^4$ som genereras av mängden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$. Basen för $W^{\perp}$ behöver här inte väljas ortogonal.

14. Avståndet från en punkt $\mathbf{y}$ i $\mathbf{R}^n$ till ett delrum W definieras som avståndet från $\mathbf{y}$ till den närmaste punkten i W. Bestäm avståndet från $\mathbf{y}$ till det delrum W som genereras av vektorerna $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ där

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

15. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$

Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p_0(t) = 1$ och $p_2(t) = t^2$, dvs låt $W = \text{Span}\{1, t^2\}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$.

16. Låt H vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = t^2$, dvs låt $H = \text{Span}\{t, t^2\}$. Vad är den ortogonala projektionen av polynomet $p_0(t) = 1$ på H med avseende på den inre produkten (1)?

17.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Matrisen A har tydligen egenvärdena 5 och 1. Bestäm en bas för egenrummet hörande till egenvärdet 1.

18.
$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

där $0 < \theta < \pi$. Vilka egenvärden (reella) har matrisen A?

19. För vilka värden på a är grafen av ekvationen $2x_1x_2 + 2ax_2^2 = 1$ en hyperbel?

20. Den linjära avbildningen $D : \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$ som definieras genom

$$D(a + bt + ct^2) = b + 2ct$$

har egenvärdet $\lambda = 0$. Vad är multipliciteten av detta egenvärde? Med detta menas multipliciteten av λ som rot till karakteristiska ekvationen av matrisen för D med avseende på t ex basen $\{1, t, t^2\}$?

PROBLEM

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bestäm en bas för kolonnrummet Col A och en bas för nollrummet Nul A av matrisen A.

2. $\mathbf{P}_3$ är rummet av polynom av grad högst tre inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_3$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt \tag{2}$$

De tre *Legendre polynomen* $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = 3t^2 - 1$ är ortogonala med avseende på denna inre produkt. Bestäm avståndet från $p_3(t) = t^3$ till det delrum som spänns av p_0, p_1 och p_2.

3. Egenvärdena av matrisen för den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

kan beräknas till 2, -1 och -4. Grafen av ekvationen $Q(\mathbf{x}) = 1$ är därför en två-mantlad hyperboloid. Denna yta skär bara en av sina symmetriaxlar, vilka är de räta linjer genom origo som är parallella med principalaxlarna. Bestäm riktningen i $x_1x_2x_3-$systemet av den symmetriaxel som ytan skär.

4. Antag att $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ är en linjär avbildning sådan att nollrummet $N(T)$ är samma rum som värderummet $V(T)$, dvs $N(T) = V(T)$. Visa att om det finns sådana avbildningar så måste n var ett jämnt tal. Försök finna någon sådan avbildning för t ex $n = 2$ och eventuellt för större jämna n. Kan en sådan avbildning vara diagonaliserbar?