Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, J. Granström

TENTAMEN 2004-03-17
Linjär algebra MN1
VT 2004

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Alla a
2. $a \neq 0$
3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
5. $a = -2$
6. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
7. Alla a
8. 3
9. 2
10. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
11. Alla k
12. Egenvärdena är 1 och 0
13. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och som råkade bli en ortogonal bas för komplementet
14. 6
15. En bas är t ex $\{t\}$
16. $\frac{5}{3}t^2$

17. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$

18. Egenvärdena är 1 och -1

19. Alla a

20. 3

1. Avbildningens matris är radekvivalent med $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. En bas för Col$A$ är t ex $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och en bas för Nul A är t ex $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

2. Eftersom $< p_3, p_0 >=< p_3, p_2 >= 0$ är den ortogonala projektionen

$$\hat{p}_3 = \frac{< p_3, p_1 >}{< p_1, p_1 >} p_1 = \frac{3}{5} t.$$

Avståndet är $||p_3 - \hat{p}_3|| = \sqrt{< t^3 - \frac{3}{5}t, t^3 - \frac{3}{5}t >} = \sqrt{\frac{8}{175}}.$

3. Matrisen för den kvadratiska formen är

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom egenvärdena är $2, -1, -4$ finns ett ortogonalt basbyte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ så att den kvadratiska formen blir $Q(\mathbf{y}) = 2y_1^2 - y_2^2 - 4y_3^2$, där y_1, y_2, y_3-axlarna blir hyperboloidens $Q(\mathbf{y}) = 1$ symmetriaxlar. Ytan skär endast y_1-axeln vilken svarar mot en egenvektor hörande till egenvärdet 2. En sådan tillhör Nul $(A - 2I)$ och vi finner att den aktuella symmetriaxeln har riktningen $(1, 2, 2)$.

4. Enligt rangsatsen, även kallad dimensionssatsen, är $\dim N(T) + \dim V(T) = \dim \mathbf{R}^n$. Om $N(T) = V(T)$ och alltså $\dim N(T) = \dim V(T) = p$ blir $n = 2p$, ett jämnt tal. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ definierar en avbildning $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ med $V(T) = N(T) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
T kan generaliseras till högre dimension genom $\begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$ osv. Egenrummet $E(0) =$ Nul T och alltså är $\dim E(0) = p = n/2$. Egenvärden $\lambda \neq 0$ finns inte, ty om $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}, \lambda \neq 0$ skulle $\mathbf{x} = T(\frac{1}{\lambda}\mathbf{x})$ tillhöra $V(T)$ och därmed Nul $T = E(0)$. Summan av egenrummens dimensioner är alltså $n/2$ och avbildningen kan inte vara diagonaliserbar.