Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, J. Granström

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2004-06-10

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges samt 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 8-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på a är de **tre** vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$ linjärt beroende i $\mathbf{R^2}$?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på a innehåller värderummet av T vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en moturs rotation omkring origo vinkeln $\pi/4$. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2) = (x_1,\, x_1,\, x_2,\, x_2).$$
Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. För vilka värden på a innehåller nollrummet Nul A vektorn $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$?

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $\mathbf{P}_n\,, n = 0, 1, 2, \ldots$ är rummet av polynom av grad högst n inklusive nollpolynomet. Definiera W som det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av mängden $S = \{\, 1{+}2t{+}t^2,\; 1{-}2t{+}t^2\}$. För vilka värden på a ingår $1 + t + at^2$ i W?

8. Definiera W som det delrum av $\mathbf{P}_3$ som genereras av mängden

$$S = \{1 - 3t + 5t^2,\; -3 + 5t - 7t^2,\; -4 + 5t - 6t^2,\; 1 - t^2\}.$$

Vad är dimensionen av W?

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda = 1$ av multipliciteten 4. Vad är dimensionen för egenrummet hörande till detta egenvärde?

10. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde $\lambda = 1$ av multipliciteten 2. Bestäm en bas av egenvektorer för egenrummet hörande till detta egenvärde.

11. För vilka värden på k är $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras som projektion på planet $x_3 = 0$. Ett av egenvärdena för T har multipliciteten 2. Vilket är detta egenvärde?

13. Definiera W som det delrum av $\mathbf{R}^3$ som genereras av vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en *ortogonal* bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$.

14. Avståndet från en punkt $\mathbf{y}$ i $\mathbf{R}^n$ till ett delrum W definieras som avståndet från $\mathbf{y}$ till den närmaste punkten i W. Bestäm avståndet från $\mathbf{y}$ till det delrum W som genereras av vektorerna $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ där

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

15. $\mathbf{P}_1$ är rummet av polynom av grad högst ett inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_1$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)\, dt \tag{1}$$

Normen $||p||$ av ett polynom p definieras som $||p|| = \sqrt{< p, p >}$ med avseende på den inre produkten (1). Avståndet mellan två polynom p och q definieras som $||p - q||$. Bestäm avståndet mellan $p(t) = 1$ och $q(t) = t$.

16. Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_1$ som genereras av $p(t) = t$, dvs låt $W = \text{Span}\{t\}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$ med avseende på den inre produkten (1).

17.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen A har tydligen egenvärdena 5 och 4. Bestäm en bas för egenrummet hörande till egenvärdet 5.

18.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

där $0 < \theta < \pi$. Vilka egenvärden (reella) har matrisen A?

19. För vilka värden på $a \neq 0$ och $b \neq 0$ är grafen av ekvationen $2ax_1x_2 + 2bx_2^2 = 1$ en hyperbel?

20. Den linjära avbildningen $T : \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$ definieras genom $T(p) = p + p'$ dvs

$$T(a + bt + ct^2) = (a + b) + (b + 2c)t + ct^2.$$

Bestäm avbildningens eventuella egenvärden.

PROBLEM

1.

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Tillhör $\mathbf{w}$ nollrummet $\text{Nul}\, A$? Tillhör $\mathbf{w}$ kolonnrummet $\text{Col}\, A$? Motivera svaren noggrant.

2. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)\, dt.$$

Polynomen $p(t) = 1$ och $q(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$ är ortogonala med avseende på denna inre produkt. Bestäm den ortogonala projektionen av $p_0(t) = t$ på det delrum som spänns av p och q.

3. Egenvärdena av matrisen för den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

kan beräknas till 9 och -3 där egenvärdet 9 har multipliciteten 2. Grafen av ekvationen $Q(\mathbf{x}) = 1$ är därför en en-mantlad rotationshyperboloid. En av symmetriaxlarna skär inte ytan. Symmetriaxlarna är de räta linjer genom origo som är parallella med principalaxlarna. Bestäm det minsta avståndet från en punkt på ytan till origo. Bestäm också riktningen i $x_1x_2x_3-$systemet av den symmetriaxel som inte skär ytan.

4. Låt A vara en $n \times n$ matris sådan att

$$A^2 = A.$$

Visa att varje vektor $\mathbf{u}$ i $\mathbf{R}^n$ entydigt kan skrivas som

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

där $\mathbf{v}$ tillhör nollrummet $\text{Nul}\, A$ och $\mathbf{w}$ tillhör kolonnrummet $\text{Col}\, A$.