Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, J. Granström

TENTAMEN 2004-06-10
Linjär algebra MN1
VT 2004

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Alla a
2. Alla a
3. $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
5. Alla a
6. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
7. $a = 1$
8. 2
9. 3
10. T ex $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som här är vald ortogonal
11. Alla k
12. 1
13. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
14. $\sqrt{40}$
15. $\sqrt{\frac{1}{3}}$
16. $1 - \frac{3}{2}t$

17. $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$

18. Egenvärdena är 1 och -1

19. Hyperbel för alla $a \neq 0$ och $b \neq 0$. Även för $b = 0$, $a \neq 0$.

20. 1

1. Vektorn $\mathbf{w}$ tillhör nollrummet $\mathrm{N}(A)$, ty

$$\begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dvs $A\mathbf{w} = [\mathbf{u_1}\,\mathbf{u_2}\,\mathbf{u_3}]\,\mathbf{w} = \mathbf{0}$. För värderummet $\mathrm{V}(A)$ följer av dimensionssatsen att dim V(A) ≤ 2. De två första kolonnerna $\mathbf{u_1}$ och $\mathbf{u_2}$ i A kan väljas som bas för värderummet och $\mathbf{w}$ tillhör värderummet eftersom matrisen $[\mathbf{u_1}\,\mathbf{u_2}\,\mathbf{w}]$ har rangen 2.

2. Eftersom $< p_0, q >= 0$ är den ortogonala projektionen

$$\hat{p}_0 = \frac{< p_0, p >}{< p, p >} p = \frac{1}{2}.$$

3. Matrisen för den kvadratiska formen är

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Eftersom egenvärdena är $9, 9, -3$ finns ett ortogonalt basbyte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ så att den kvadratiska formen blir $Q(\mathbf{y}) = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 3y_3^2$, där y_1, y_2, y_3-axlarna blir hyperboloidens $Q(\mathbf{y}) = 1$ symmetriaxlar. Ytan skär planet $y_3 = 0$ längs cirkeln $9y_1^2 + 9y_2^2 = 1$, dvs $y_1^2 + y_2^2 = (1/3)^2$, vilket ger det minsta avståndet $= 1/3$ från origo till en punkt på ytan. Den symmetriaxel som inte skär ytan hör till egenvärdet -3. En riktningsvektor tillhör Nul $(A - 3I)$ och vi finner att den aktuella symmetriaxeln har riktningen $(1, 2, 1)$.

4. Nul (A) och Col (A) har endast har nollvektorn gemensam, ty om $\mathbf{y} \in$ Col (A), dvs $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, och dessutom $\mathbf{y} \in$ Nul (A) så blir $\mathbf{0} = A\mathbf{y} = A(A\mathbf{x}) = A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ enligt villkoret $A^2 = A$. Enligt dimensionssatsen är dessutom dim Nul $(A) +$ dim Col $(A) = n$ och då de båda delrummen endast har nollvektorn gemensam finns en bas i $\mathbf{R}^n$ som består av en bas i Nul (A) och en bas i Col (A). Varje vektor $\mathbf{u}$ i $\mathbf{R}^n$ kan därför skrivas som $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ där $\mathbf{v} \in$ Nul A och $\mathbf{w} \in$ Col A. Om framställningen inte vore entydig skulle $\mathbf{u} = \mathbf{v_1} + \mathbf{w_1} = \mathbf{v_2} + \mathbf{w_2}$, dvs $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = \mathbf{w_2} - \mathbf{w_1}$. Vi skulle då ha en gemensam vektor $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = \mathbf{w_2} - \mathbf{w_1}$ i Nul A och Col A, som ju då är nollvektorn. Alltså $\mathbf{0} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = \mathbf{w_2} - \mathbf{w_1}$ så $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2}, \mathbf{w_1} = \mathbf{w_2}$.