Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, J. Granström

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2004-08-20

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges samt 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 14-19 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på a och b är de **två** vektorerna $[a]$ och $[b]$ linjärt beroende i $\mathbf{R}^{\mathbf{1}}$?
2. $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är en linjär avbildning sådan att $T(2) = 1$. Vad är $T(-8)$?
3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en medurs rotation omkring origo vinkeln $-\pi/4$. Vad är standardmatrisen av T?
4. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_4,\ x_2 - x_3).$$
Vad är standardmatrisen av T ?
5. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.
6. $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ är en linjär avbildning vars matris med avseende på standardbasen är $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vad är n och m i detta fall?

7. $\mathbf{P}_n\,, n = 0, 1, 2, \ldots$ är rummet av polynom av grad högst n inklusive nollpolynomet. Mängden $\mathcal{B} = \{\,1 + t^2,\ t + t^2,\ 1 + 2t + t^2\}$ är en bas för $\mathbf{P}_2$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{p}(t) = 2t$ med avseende på basen $\mathcal{B}$.

8. Betrakta polynomen $\mathbf{p}_1(t) = 1 + t$, $\mathbf{p}_2(t) = 1 - t$, $\mathbf{p}_3(t) = 4$, $\mathbf{p}_4(t) = t + t^2$ och $\mathbf{p}_5(t) = 1 + 2t + t^2$ och låt H vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av mängden $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5\}$. Ange en bas för H bestående av polynom från mängden S.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda = 2$ av multipliciteten 2. Vad är dimensionen för egenrummet hörande till detta egenvärde?

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda = 2$ av multipliciteten 2. Bestäm en bas av egenvektorer för egenrummet hörande till detta egenvärde.

11. För vilka värden på k är $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras som projektion på planet $x_3 = 0$. Ett av egenvärdena för T har multipliciteten 1. Vilket är detta egenvärde?

13. Definiera W som det delrum av $\mathbf{R}^4$ som genereras av vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en *ortogonal* bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$.

14.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{y}$ på det delrum av $\mathbf{R}^4$ som genereras av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

15. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$

Normen $||p||$ av ett polynom p definieras som $||p|| = \sqrt{< p, p >}$ med avseende på den inre produkten (1). Avståndet mellan två polynom p och q definieras som $||p - q||$. Bestäm avståndet mellan $p(t) = t + 1$ och $q(t) = t - 1$.

16. Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p_1(t) = 1$ och $p_2(t) = t$, dvs låt $W = \text{Span}\{1, t\}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$ med avseende på den inre produkten (1).

17.
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm egenvärdena till matrisen A^2 samt ange multipliciteten för varje sådant egenvärde.

18.
$$A = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

där $0 < \theta < \pi$. Vilka egenvärden har matrisen A?

19. Grafen av ekvationen $8x_1x_2 + 6x_2^2 = 1$ är en hyperbel. Vilket är det minsta avståndet till origo från en punkt på hyperbeln?

20. Den linjära avbildningen $T : \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$ definieras genom $T(p(t)) = t\,p''(t) + p(t)$, dvs

$$T(a + bt + ct^2) = a + (b + 2c)t + ct^2.$$

Avbildningen har egenvärdet 1 av multiplicitet 3. Bestäm en bas av egenvektorer för egenrummet hörande till detta egenvärde.

PROBLEM

1. Låt W vara mängden av alla vektorer av formen

$$A = \begin{bmatrix} a - 2b + 5c \\ 2a + 5b - 8c \\ -a - 4b + 7c \\ 3a + b + c \end{bmatrix}.$$

Bestäm dimensionen av W samt ange också en bas för W. Motivera noggrant.

2. $\mathbf{P}_3$ är rummet av polynom av grad högst tre inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_3$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt.$$

Polynomen $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$ är ortogonala med avseende på denna inre produkt. Bestäm den ortogonala projektionen av $p_0(t) = t^3$ på det delrum som spänns av $p_1(t)$ och $p_2(t)$.

3. Egenvärdena av matrisen för den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

kan beräknas till 9 och -3 där egenvärdet 9 har multipliciteten 2. Grafen av ekvationen $Q(\mathbf{x}) = 1$ är därför en en-mantlad rotationshyperboloid. Eftersom egenvärdena är $9, 9, -3$ finns ett ortogonalt basbyte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ så att den kvadratiska formen blir $Q(\mathbf{y}) = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 3y_3^2$, där y_1, y_2, y_3-axlarna blir hyperboloidens $Q(\mathbf{y}) = 1$ symmetriaxlar. Planet $y_3 = 0$ är ett symmetriplan för ytan. Bestäm ekvationen för detta symmetriplan i $x_1x_2x_3$-systemet.

4. Låt A vara en $n \times n$ matris sådan att kolonnrummet Col A har dimensionen $= 1$. Visa att det då finns ett tal k sådant att

$$A^2 = k \cdot A.$$

Visa också genom exempel att om $n > 1$ så finns matriser för vilka talet k är $= 0$.