Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, J. Granström

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2005-03-21

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges samt 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 8-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på a är de **två** vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ linjärt beroende i $\mathbf{R^2}$?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på a innehåller värderummet av T vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en moturs rotation omkring origo vinkeln $3\pi/4$. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3,\, x_2 + x_4).$$
Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & a \end{bmatrix}$. För vilka värden på a innehåller nollrummet Nul A vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

6. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ definierar en projektion. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med avseende på basen $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

8. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med avseende på den ortogonala basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde $\lambda = -1$ av multipliciteten 2. Vad är dimensionen för egenrummet hörande till detta egenvärde?

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda = 1$ av multipliciteten 3. Bestäm en bas för egenrummet hörande till detta egenvärde.

11. För vilka värden på a är $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras som spegling i planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Vilka egenvärden har T?

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet till nollrummet $\mathrm{Nul}\ A$.

14. Avståndet från en punkt $\mathbf{y}$ i $\mathbf{R}^n$ till ett delrum W definieras som avståndet från $\mathbf{y}$ till den närmaste punkten i W. Bestäm avståndet från $\mathbf{y}$ till det delrum W som genereras av vektorerna $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ där

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

15. $\mathbf{P}_1$ är rummet av polynom av grad högst ett inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_1$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$

Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_1$ som genereras av $p(t) = 1-3t$, dvs låt $W = \text{Span}\{1-3t\}$. Vad är den ortogonala projektionen av polynomet $p_0(t) = 1$ på W med avseende på den inre produkten (1)?

16. Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_1$ som genereras av $p(t) = 1-3t$, dvs låt $W = \text{Span}\{1-3t\}$. Finn en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$ med avseende på inre produkten (1).

17.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Matrisen A^2 har egenvärdena 25 och 1. Bestäm en bas för egenrummet till A^2 hörande till egenvärdet 25.

18. $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ hörande till egenvärdet $\lambda_1 = 10$.

Matrisen har också egenvärdet $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ av multipliciteten 2. Bestäm en ortogonal bas av egenvektorer till A.

19. För vilka värden på a är grafen av ekvationen $x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2 = 1$ en ellips eller en cirkel?

20. Låt den linjära avbildningen $T : \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$ definieras genom

$$T(a + bt + ct^2) = 3a + (5a - 2b)t + (4b + c)t^2.$$

Vad är matrisen för T med avseende på basen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$?

PROBLEM

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm en bas för kolonnrummet Col A och en bas för nollrummet Nul A av matrisen A. Snittet av Col A och Nul A, som skrivs Col $A \cap$ Nul A, är det delrum av vektorer som tillhör både Col A och Nul A. Bestäm även en bas för Col $A \cap$ Nul A.

2. $\mathbf{P}_3$ är rummet av polynom av grad högst tre inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_3$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt \tag{2}$$

De tre *Legendre polynomen* $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = 3t^2 - 1$ är ortogonala med avseende på denna inre produkt. Bestäm den ortogonala projektionen av $p(t) = t^3$ på det delrum W som spänns av p_0, p_1 och p_2. Bestäm slutligen en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$ till W.

3. Egenvärdena av matrisen för den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

kan beräknas till 2, -1 och -1. Grafen av ekvationen $Q(\mathbf{x}) = 1$ är därför en två-mantlad hyperboloid. Denna yta skär bara en av sina symmetriaxlar, vilka är de räta linjer genom origo som är parallella med principalaxlarna. Bestäm koordinaterna för de två skärningspunkterna i $x_1x_2x_3-$systemet.

4. Låt V och W vara vektorrum, låt $T : V \to W$ vara en linjär transformation och låt $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ vara en delmängd av V.
Visa att om $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ är linjärt beroende i V så är mängden $\{T(\mathbf{v_1}), \ldots, T(\mathbf{v_p})\}$ linjärt beroende i W.
Antag att T är en ett-till-ett transformation, dvs att ekvationen $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ alltid medför att $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Visa då att om mängden $\{T(\mathbf{v_1}), \ldots, T(\mathbf{v_p})\}$ är linjärt beroende så är $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ linjärt beroende.