Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, J. Granström

TENTAMEN 2005-03-21
Linjär algebra MN1
VT 2005

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Alla a
2. Alla a
3. $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
5. $a = 0$
6. T ex $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
7. Koordinaterna är $(1, -1)$.
8. Koordinaterna är $(1, 0, 1, 0)$.
9. 2
10. T ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
11. Alla a
12. Egenvärdena är 1 och -1
13. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
14. 2
15. $\frac{1}{4}(1 - 3t)$
16. $1 + t$
17. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

19. $-1 < a < 1$

20. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

1. Avbildningens matris är radekvivalent med $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. En bas för Nul A är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och en bas för Col A är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som också är en bas för Col $A \cap$ Nul A.

2. Eftersom $< p, p_0 >=< p, p_2 >= 0$ är den ortogonala projektionen
$$\hat{p} = \frac{< p, p_1 >}{< p_1, p_1 >} p_1 = \frac{3}{5} t.$$
Eftersom $p - \hat{p} = t^3 - \frac{3}{5}t$ är ortogonal mot W, dvs tillhör $W^\perp$, och $\dim W + \dim W^\perp =$ $= \dim \mathbf{P}_3 = 4$ följer att $\dim W^\perp = 4 - 3 = 1$ och alltså är t ex $t^3 - \frac{3}{5}t$ en bas för $W^\perp$.

3. Matrisen för den kvadratiska formen är $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Eftersom egenvärdena är $2, -1, -1$ finns ett ortogonalt basbyte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ så att den kvadratiska formen blir $Q(\mathbf{y}) = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, där y_1, y_2, y_3-axlarna blir hyperboloidens $Q(\mathbf{y}) = 1$ symmetriaxlar. Ytan skär endast y_1-axeln vilken svarar mot en egenvektor hörande till egenvärdet 2. En sådan tillhör Nul $(A - 2I)$ och vi finner att den aktuella symmetriaxeln har riktningen $(1, 1, 1)$. Skärningen med symmetriaxeln är $(\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0)$ i $y_1 y_2 y_3$-systemet vilket enligt $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ svarar mot $\pm(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$ i $x_1 x_2 x_3$-systemet. Notera att P ska vara en *o*rtogonal matris, dvs kolonnerna ska vara normerade.

4. Om $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ är linjärt beroende så finns skalärer $c_1, \ldots, c_p$, ej alla 0, så att $c_1\mathbf{v_1} + \ldots + c_p\mathbf{v_p} = \mathbf{0}$. Eftersom T är linjär följer av denna relation att $c_1 T(\mathbf{v_1}) + \ldots + c_p T(\mathbf{v_p}) = \mathbf{0}$, dvs $\{T(\mathbf{v_1}), \ldots, T(\mathbf{v_p})\}$ är linjärt beroende.

   Om $\{T(\mathbf{v_1}), \ldots, T(\mathbf{v_p})\}$ är linjärt beroende så finns på samma sätt skalärer $c_1, \ldots, c_p$, ej alla 0, så att $c_1 T(\mathbf{v_1}) + \ldots + c_p T(\mathbf{v_p}) = \mathbf{0}$. Eftersom T är linjär följer av denna relation att $T(c_1\mathbf{v_1} + \ldots + c_p\mathbf{v_p}) = \mathbf{0}$. Om T är ett-till-ett är $\mathbf{0}-$vektorn den enda vektor som avbildas på $\mathbf{0}-$vektorn och det följer att $c_1\mathbf{v_1} + \ldots + c_p\mathbf{v_p} = \mathbf{0}$, dvs $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ är linjärt beroende.