Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, J. Granström

TENTAMEN 2005-06-09
Linjär algebra MN1
VT 2005

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $a = 0$
2. Alla a
3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
5. $a = 2$
6. T ex $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
7. Koordinaterna är $(2, -1)$.
8. Koordinaterna är $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
9. T ex $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
10. 2
11. Alla a
12. Egenvärdena är 1 och -1
13. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
15. $\frac{3}{4}(1 + t)$

16. $1-3t$

17. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

19. $|a| > 1$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. T ex ger radoperationer att matrisen är radekvivalent med en matris av rang 4 och att en bas för Col A därför består av matrisens fyra kolonner. En snabbare metod är att observera att kolonnerna är ortogonala och alltså t o m är en ortogonal bas för Col A. Dimensionssatsen ger att dim Nul $A = 0$, dvs Nul $A = \{\mathbf{0}\}$.

2. Eftersom $< p, p_0 >=< p, p_2 >= 0$ är den ortogonala projektionen
$$\hat{p} = \frac{< p, p_1 >}{< p_1, p_1 >} p_1 = \frac{3}{5} t.$$
Avståndet från p till delrummet W ges av
$$||p - p_0|| = \sqrt{< p - p_0, p - p_0 >} = \sqrt{\int_{-1}^{1} (t^3 - \frac{3}{5}t)(t^3 - \frac{3}{5}t)\, dt} = \sqrt{\frac{8}{175}}.$$

3. Matrisen för den kvadratiska formen är $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Eftersom egenvärdena är $2, -1, -1$ finns ett ortogonalt basbyte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ så att den kvadratiska formen blir $Q(\mathbf{y}) = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, där y_1, y_2, y_3-axlarna blir hyperboloidens $Q(\mathbf{y}) = 1$ symmetriaxlar. Ytan skär endast y_1-axeln vilken svarar mot en egenvektor hörande till egenvärdet 2. En sådan tillhör Nul $(A - 2I)$ och vi finner att den aktuella symmetriaxeln har riktningen $(1, 1, 1)$ i $x_1x_2x_3$-systemet. Skärningen med symmetriaxeln är $(\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0)$ i $y_1y_2y_3$-systemet vilket ger att avståndet mellan dessa punkter är $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \sqrt{2}$.

4. Låt $c_1\mathbf{v_1} + \ldots + c_p\mathbf{v_p} = \mathbf{0}$. Då T är linjär följer att $c_1\, T(\mathbf{v_1}) + \ldots + c_p\, T(\mathbf{v_p}) = \mathbf{0}$. Eftersom $\{T(\mathbf{v_1}), \ldots, T(\mathbf{v_p})\}$ är linjärt oberoende blir $c_1 = \ldots = c_p = 0$ och påståendet är bevisat.
Låt sedan $c_1\, T(\mathbf{v_1}) + \ldots + c_p\, T(\mathbf{v_p}) = \mathbf{0}$. Eftersom T är linjär följer $T(c_1\mathbf{v_1} + \ldots + c_p\mathbf{v_p}) = \mathbf{0}$. Om T är ett-till-ett är $\mathbf{0}-$vektorn den enda vektor som avbildas på $\mathbf{0}-$vektorn och det följer att $c_1\mathbf{v_1} + \ldots + c_p\mathbf{v_p} = \mathbf{0}$. Då dessa vektorer är linjärt oberoende blir $c_1 = \ldots = c_p = 0$ och påståendet är bevisat.