Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2005-08-28

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges samt 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 10-15 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på a är de **två** vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$ linjärt beroende i $\mathbf{R^2}$?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på a innehåller värderummet av T vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en moturs rotation omkring origo vinkeln $\pi/4$. Vad är standardmatrisen av T ?

4. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,\, x_4).$$
Vad är standardmatrisen av T ?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$. För vilka värden på a innehåller nollrummet Nul A vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$?

6. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ med avseende på basen $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

8. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ med avseende på den ortogonala basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde $\lambda = 1$ av multipliciteten 2. Bestäm en bas för egenrummet hörande till detta egenvärde.

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ har tre egenvärden av vilka två är 0 och 1. Vilket är det tredje egenvärdet?

11. För vilka värden på a är $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras som spegling i planet $x_1 = 0$. Vilka egenvärden har T?

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet till nollrummet Nul A.

14. Bestäm den punkt som är närmast $\mathbf{y}$ i det delrum W som genereras av vektorerna $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ där

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

15. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt \tag{1}$$

Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p(t) = t^2$, dvs låt $W = \text{Span}\{t^2\}$. Vad är den ortogonala projektionen av polynomet $p_0(t) = 1$ på W med avseende på den inre produkten (1)?

16. Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p(t) = t^2$, dvs låt $W = \text{Span}\{t^2\}$. Finn en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$ med avseende på inre produkten (1).

17.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas av egenvektorer till matrisen A.

18. $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvärdet $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ av multipliciteten 2. Bestäm en *ortogonal* bas av egenvektorer för egenrummet hörande till detta egenvärde.

19. För vilka värden på a är grafen av ekvationen $ax_1^2 + 2x_1x_2 + ax_2^2 = 1$ en ellips?

20. Låt den linjära avbildningen $T : \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$ definieras genom

$$T(a + bt + ct^2) = c + at + bt^2.$$

Vad är matrisen för T med avseende på basen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$?

PROBLEM

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm en bas för kolonnrummet Col A och en bas för nollrummet Nul A av matrisen A.

2. $\mathbf{P}_3$ är rummet av polynom av grad högst tre inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_3$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt \tag{2}$$

De tre *Legendre polynomen* $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = 3t^2 - 1$ är ortogonala med avseende på denna inre produkt. Låt W vara det delrum som spänns av p_0, p_1 och p_2. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$ till W.

3. Egenvärdena av matrisen för den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

kan beräknas till 2, -1 och -1. Grafen av ekvationen $Q(\mathbf{x}) = 1$ är därför en två-mantlad rotationshyperboloid. Denna yta skär bara en av sina symmetriaxlar vilken också är ytans rotationsaxel. Symmetriaxlarna är de räta linjer genom origo som är parallella med principalaxlarna. De två plan som är vinkelräta mot rotationsaxeln och har avståndet 1 till origo skär ytan längs två lika stora cirklar. Bestäm radien i en sådan cirkel. Bestäm också ekvationen i $x_1x_2x_3$-systemet för det plan genom origo som är vinkelrätt mot rotationsaxeln. Ange ekvationen på formen $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$.

4. Låt V och W vara vektorrum av ändlig dimension och $T : V \to W$ en linjär transformation. Låt H vara ett icke-tomt delrum av V och låt $T(H)$ vara mängden av bilderna i W av vektorerna i H. Då är $T(H)$ ett delrum av W.
Visa att $\dim T(H) \leq \dim H$.
Antag att T är en ett-till-ett transformation, dvs att ekvationen $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ alltid medför att $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Visa då att $\dim T(H) = \dim H$.