Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Johan Granström

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2006-03-20

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges samt 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 9-14 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på a är de **två** vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ linjärt beroende i $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}$?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på a innehåller värderummet av T vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en moturs rotation omkring origo vinkeln $\pi/2$. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4,\, x_1).$$
Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$. För vilka värden på a innehåller nollrummet Nul A vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$?

6. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $\mathbf{P}_3$ är rummet av alla polynom $p(t)$ av högst grad 3 inklusive nollpolynomet. Bestäm dimensionen av det delrum av $\mathbf{P}_3$ som spänns av $\{1+t, 1-t, 1+t^2, 1-t^2, t+t^2, t-t^2\}$.

8. Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_3$ som innehåller alla polynom för vilka $p(0) = 0$. Bestäm en bas för W.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde $\lambda = 2$ av multipliciteten 2. Bestäm en bas för egenrummet hörande till detta egenvärde.

10. Den symmetriska matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

har egenvärdena 2 och -2 av vardera multipliciteten 2. Bestäm dimensionen av motsvarande egenrum.

11.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

har egenvärdena $a-1$, a och $a+1$. För vilka värden på a är matrisen A diagonaliserbar?

12. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära transformation som definieras som spegling i planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Vilket av transformationens egenvärden har multipliciteten 2?

13. W spänns av de två vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$.

14. Bestäm avståndet från $\mathbf{y}$ till det delrum W som genereras av vektorerna $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ där

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

15. $\mathbf{P}_1$ är rummet av polynom av grad högst ett inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_1$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt \tag{1}$$

Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_1$ som genereras av $p(t) = t$, dvs låt $W = \text{Span}\{t\}$. Vad är den ortogonala projektionen av polynomet $p_0(t) = 1 + t$ på W med avseende på den inre produkten (1)?

16. Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_1$ som genereras av $p(t) = 1$, dvs låt $W = \text{Span}\{1\}$. Finn en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$ med avseende på inre produkten (1).

17.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas av egenvektorer till matrisen A^2.

18. För vilka värden på a är $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

19. För vilka värden på a är grafen av ekvationen $ax_1^2 + 2x_1x_2 + ax_2^2 = 1$ en hyperbel?

20. Låt den linjära avbildningen $T : \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$ definieras genom

$$T(a + bt + ct^2) = at + bt^2.$$

Bestäm en bas för nollrummet av T.

PROBLEM

1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestäm en bas för kolonnrummet Col A och en bas för nollrummet Nul A av matrisen A.

2. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{2}$$

Låt W vara det delrum som spänns av $p_0(t) = 1$ och $p_1(t) = t$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$ till W.

3. Egenvärdena av matrisen för den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

kan beräknas till 9 och -3 där egenvärdet 9 har multipliciteten 2. Grafen av ekvationen $Q(\mathbf{x}) = 1$ är därför en en-mantlad rotationshyperboloid. En av symmetriaxlarna skär inte ytan. Symmetriaxlarna är de räta linjer genom origo som är parallella med principalaxlarna. Det plan genom origo som är vinkelrätt mot rotationsaxeln skär ytan längs en cirkel. Bestäm radien i denna cirkel. Bestäm också ekvationen i $x_1x_2x_3$-systemet för detta plan. Ange ekvationen på formen $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$.

4. Låt V och W vara vektorrum och $T : V \to W$ en linjär transformation. Låt H vara ett icke-tomt delrum av V av ändlig dimension och låt $T(H)$ vara mängden av bilderna i W av vektorerna i H. Då är $T(H)$ ett delrum av W.
Visa att $\dim T(H) \leq \dim H$.
Antag att T är en ett-till-ett transformation, dvs att ekvationen $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ alltid medför att $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Visa då att $\dim T(H) = \dim H$.