Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2006-06-08

Till samtliga uppgifter fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 8-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

DEL 1: Max 2 poäng per problem

1. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en moturs rotation omkring origo vinkeln $\pi/4$. Vad är standardmatrisen av T?

2. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4,\ x_4).$$

Vad är standardmatrisen av T?

3. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst 2 inklusive nollpolynomet. Låt $\{1\,,\, t\,,\, 3t^2 - 1\}$ vara en bas i $\mathbf{P}_2$. Vad är koordinaterna för polynomet t^2 med avseende på denna bas?

4. W spänns av vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$.

5. Bestäm avståndet från $\mathbf{y}$ till det delrum W som genereras av vektorerna $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ där

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

V.G.V!

DEL 2: Max 3 poäng per problem

1. Låt $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på a innehåller värderummet av T vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde $\lambda = 0$ av multipliciteten 3. Bestäm dimensionen för egenrummet hörande till detta egenvärde.

3. För vilka värden på a är $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

4. För vilka värden på a är grafen av ekvationen $ax_1^2 + 2x_1x_2 + ax_2^2 = 1$ en hyperbel?

5. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt \tag{1}$$

Låt W vara det delrum som spänns av $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = t^2$. Bestäm den ortogonala projektionen med avseende på den inre produkten (1) av $p_0(t) = 1$ på W.

DEL 3: Max 5 poäng per problem

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas för kolonnrummet Col A och en bas för nollrummet Nul A av matrisen A.

2. Grafen av ekvationen $2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2 = 1$ är en ellips. Bestäm det största avståndet från origo till en punkt på ellipsen. Bestäm också koordinaterna i x_1x_2-systemet för ellipsens fyra skärningspunkter med principalaxlarna.

3. Bevisa att $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar för alla värden på a. Bestäm också en bas av egenvektorer för varje värde på a.