Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Johan Björklund

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2007-03-20

Tentamen består av 20 UPPGIFTER (max 1 poäng per uppgift) samt 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 9-14 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. För vilka värden på a är de **tre** vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ linjärt beroende i $\mathbf{R^3}$?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på a innehåller värderummet av T vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av spegling med avseende på linjen $x_1 = x_2$. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1, x_2, x_1).$$
Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & -a \\ a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & -a \\ a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}$. För vilka värden på a innehåller nollrummet Nul A vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

6. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $\mathbf{P}_1$ är rummet av alla polynom $p(t)$ av högst grad ett inklusive nollpolynomet. Bestäm dimensionen av det delrum av $\mathbf{P}_1$ som spänns av polynomet $1+t$.

8. Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_1$ som innehåller alla polynom för vilka $p(-1)=0$. Bestäm en bas för W.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde $\lambda = 0$ av multipliciteten 2. Bestäm dimensionen för egenrummet hörande till detta egenvärde.

10.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
har ett egenvärde $\lambda = 2$ av multipliciteten 2. Bestäm en bas för egenrummet $E(2)$.

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdena 0 och 3. Är det möjligt att bestämma en ortogonal bas av egenvektorer till A? Motivera svaret.

12. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära transformation som definieras som spegling i x_1-axeln. Bestäm en bas av egenvektorer hörande till denna spegling?

13. W spänns av de två vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{R^4}$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$.

14. Bestäm avståndet i $\mathbf{R^3}$ från $\mathbf{y}$ till det delrum W som genereras av vektorerna $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ där

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

15. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$

Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = t^2$, dvs låt $W = \text{Span}\{t,\, t^2\}$. Bevisa att den ortogonala projektionen av polynomet $p_0(t) = 1$ på W med avseende på den inre produkten (1) är $\frac{5}{3}t^2$.

16. Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = t^2$, dvs låt $W = \text{Span}\{t,\, t^2\}$. Finn en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$ med avseende på inre produkten (1).

17.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas av egenvektorer hörande till egenrummet $E(1)$.

18.
$$A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ -1 & a-1 \end{bmatrix}.$$

För vilka värden på a är matrisen A diagonaliserbar?

19. Bevisa att grafen av ekvationen $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 1$ är en hyperbel.

20. Låt den linjära avbildningen $T : \mathbf{P_3} \to \mathbf{P_3}$ definieras genom

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = a_2t + a_0t^3.$$

Bestäm en bas för nollrummet av T.

PROBLEM

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm en bas för kolonnrummet Col A och en bas för nollrummet Nul A av matrisen A.

2. $\mathbf{P}_3$ är rummet av polynom av grad högst tre inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_3$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt \tag{2}$$

Låt W vara det delrum som spänns av $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = 3t^2 - 1$. Bestäm det polynom i W som ligger närmast t^3 med avseende på den inre produkten (2).

3. Egenvärdena av matrisen för den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = -7x_1^2 - x_2^2 - 7x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

kan beräknas till -9 och 3 där egenvärdet -9 har multipliciteten 2. Grafen av ekvationen $Q(\mathbf{x}) = 1$ är därför en två-mantlad rotationshyperboloid. Endast en av symmetriaxlarna skär ytan och denna axel är samtidigt rotationsaxel. Symmetriaxlarna är de räta linjer genom origo som är parallella med principalaxlarna. Ange det minsta avståndet från en punkt på ytan till origo. Bestäm också riktningen i $x_1x_2x_3$-systemet för rotationsaxeln.

4. Låt V vara ett vektorrum och V^* mängden av alla linjära transformationer från V till $\mathbf{R}$.

a) Visa att V^* är ett vektorrum.

b) Antag att V har ändlig dimension. Visa att då är $\dim V = \dim V^*$. **Ledning:** Välj en bas $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$ i V. Välj därefter transformationerna $T_1, \ldots, T_n$ i V^* så att $T_k(\mathbf{e_k}) = 1$ och $T_k(\mathbf{e_j}) = 0$, $k \neq j$. Visa att $T_1, \ldots, T_n$ är en bas i V^*. Alltså är $\dim V^* = \dim V$ men isomorfismen mellan V och V^* beror på valet av bas i V.

c) Visa att då $\dim V < \infty$ finns faktiskt en naturlig isomorfism Φ mellan V och $V^{**} = (V^*)^*$ definierad genom

$$(\Phi(\mathbf{v}))(T) = T(\mathbf{v})$$

för alla $\mathbf{v}$ i V och T i V^*.