Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Johan Björklund

TENTAMEN
LINJÄR ALGEBRA MN1
2007-06-08

Tentamen består av 20 UPPGIFTER (max 1 poäng per uppgift) samt 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 8-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. För vilka värden på a är de **tre** vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$ linjärt beroende i $\mathbf{R^3}$?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på a innehåller värderummet av T vektorn $\begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av spegling med avseende på x_2-axeln. Vad är standardmatrisen av T ?

4. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att
$$T(x_1, x_2) = (x_1,\, -x_2,\, x_1, -x_2).$$
Vad är standardmatrisen av T ?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. För vilka värden på a innehåller nollrummet Nul A vektorn $\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}$?

6. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $\mathbf{P}_2$ är rummet av alla polynom $p(t)$ av högst grad två inklusive nollpolynomet. Bestäm dimensionen av det delrum av $\mathbf{P}_2$ som spänns av polynomen $1+t$ och $t(1+t)$.

8. Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som innehåller alla polynom för vilka $p(-1)=0$. Bestäm en bas för W.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde $\lambda = 2$ av multipliciteten 2. Bestäm dimensionen för egenrummet hörande till detta egenvärde.

10.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

har ett egenvärde $\lambda = -2$ av multipliciteten 2. Bestäm en bas för egenrummet $E(-2)$.

11. Man kan visa att $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. Är det möjligt att bestämma en ortogonal bas av egenvektorer till A? Motivera svaret.

12. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära transformation som definieras som spegling i linjen $x_1 = x_2$. Bestäm en bas av egenvektorer hörande till denna spegling?

13. W spänns av de två vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{R}^4$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$.

14. Bestäm den ortogonala projektionen i $\mathbf{R}^3$ av vektorn $\mathbf{y}$ på det delrum W som genereras av vektorerna $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ där

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

15. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$

Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p_1(t) = 1$ och $p_2(t) = t$, dvs låt $W = \text{Span}\{1,\, t\}$. Bevisa att den ortogonala projektionen av polynomet $p_0(t) = t^2$ på W med avseende på den inre produkten (1) är $\frac{1}{3}$.

16. Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p_1(t) = 1$ och $p_2(t) = t$, dvs låt $W = \text{Span}\{1,\, t\}$. Finn en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$ med avseende på inre produkten (1).

17.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas av egenvektorer hörande till egenrummet $E(5)$.

18.

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 \\ -1 & 1-a \end{bmatrix}$$

Motivera varför matrisen A är diagonaliserbar om $|a| > 1$.

19. Grafen av ekvationen $x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2 = 1$ är en hyperbel. Bestäm det minsta avståndet till origo från en punkt på grafen.

20. Låt den linjära avbildningen $T : \mathbf{P_3} \to \mathbf{P_3}$ definieras genom

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = a_2 + a_0t^2.$$

Bestäm en bas för nollrummet av T.

PROBLEM

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm en bas för kolonnrummet Col A och en bas för nollrummet Nul A av matrisen A.

2. $\mathbf{P}_3$ är rummet av polynom av grad högst tre inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_3$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{2}$$

Låt W vara det delrum som spänns av den ortogonala basen $p_1(t) = 1$ och $p_2(t) = t^3$. Bestäm det polynom i W som ligger närmast $t + t^2$ med avseende på den inre produkten (2).

3. Egenvärdena av matrisen för den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{x}) = -7x_1^2 - x_2^2 - 7x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

kan beräknas till -9 och 3 där egenvärdet -9 har multipliciteten 2. Grafen av ekvationen $Q(\mathbf{x}) = 1$ är därför en två-mantlad rotationshyperboloid. Endast en av symmetriaxlarna skär ytan och denna axel är samtidigt rotationsaxel. Symmetriaxlarna är de räta linjer genom origo som är parallella med principalaxlarna. De två plan, som är vinkelräta mot rotationsaxeln och som har avståndet 1 till origo, skär ytan längs var sin cirkel med samma radie. Bestäm denna radie.

4. Låt A vara en $n \times n$-matris. Spåret av A definieras som summan av diagonalelementen och betecknas $Tr(A)$.

a) Visa att om A och B är $n \times n$-matriser så gäller $Tr(AB) = Tr(BA)$.

b) Visa genom att använda resultatet i a) att om två $n \times n$-matriser är similära, dvs om $A = P^{-1}BP$, så gäller att $Tr(A) = Tr(B)$.

c) Gäller omvändningen till resultatet i b)? Ge bevis eller motexempel.