

Tentamen består av 20 UPPGIFTER (max 1 poäng per uppgift) samt 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar. För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.

Skrivtid: 9-14 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. För vilka värden på a är de **tre** vektorerna $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ linjärt beroende i \mathbf{R}^3 ?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. För vilka värden på a innehåller värdelummet av T vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av spegling med avseende på linjen $x_1 = 0$. Vad är standardmatrisen av T ?

4. Låt $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + x_2).$$

Vad är standardmatrisen av T ?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & -a \\ a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & -a \\ a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}$. För vilka värden på a innehåller

nollrummet Nul A vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

6. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas

för nollrummet Nul A .

7. \mathbf{P}_1 är rummet av alla polynom $p(t)$ av högst grad ett inklusive nollpolynomet. Bestäm dimensionen av det delrum av \mathbf{P}_1 som spänns av polynomet $1 - t$.

8. Låt W vara det delrum av \mathbf{P}_1 som innehåller alla polynom för vilka $p(1) = 0$. Bestäm en bas för W .

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde $\lambda = 0$ av multipliciteten 2. Bestäm en bas av

egenvektorer för egenrummet hörande till detta egenvärde.

10.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

har ett egenvärde $\lambda = 2$. Bestäm dess multiplicitet.

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdena 0 och 3. Bestäm en bas för egenrummet $E(0)$.

12. Låt $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara den linjära transformation som definieras som spegling i planet $x_1 = 0$. Bestäm en bas av egenvektorer hörande till denna spegling?

13. W spänns av de två vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i \mathbf{R}^4 . Bestäm en bas för det ortog-

onala komplementet W^\perp .

14. Bestäm avståndet i \mathbf{R}^3 från \mathbf{y} till det delrum W som genereras av vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ där

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

15. \mathbf{P}_2 är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i \mathbf{P}_2 kan man t ex definiera den inre produkten

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt \quad (1)$$

Låt W vara det delrum av \mathbf{P}_2 som genereras av $p_0(t) = 1$ och $p_2(t) = 3t^2 - 1$, dvs låt $W = \text{Span}\{p_0, p_2\}$. Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet $p_1(t) = t$ på W med avseende på den inre produkten (1).

16. Låt W vara det delrum av \mathbf{P}_2 som genereras av $p_0(t) = 1$ och $p_2(t) = 3t^2 - 1$, dvs låt $W = \text{Span}\{p_0, p_2\}$. Finn en bas för det ortogonala komplementet W^\perp med avseende på inre produkten (1).

17.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas av egenvektorer hörande till A^2 .

18.

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{bmatrix}.$$

För vilka värden på a är matrisen A diagonaliserbar?

19. Bevisa att grafen av ekvationen $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1$ är en ellips.

20. Låt den linjära avbildningen $T : \mathbf{P}_3 \rightarrow \mathbf{P}_3$ definieras genom

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = a_2t + a_0t^3.$$

Bestäm en bas för värderummet av T .

PROBLEM

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestäm en bas för kolonnrummet $\text{Col } A$ och en bas för nollrummet $\text{Nul } A$ av matrisen A .

2. \mathbf{P}_3 är rummet av polynom av grad högst tre inklusive nollpolynomet. För p och $q \in \mathbf{P}_3$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt \quad (2)$$

Låt W vara det delrum som spänns av $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = 3t^2 - 1$. Bestäm den ortogonala projektionen av t^3 på W med avseende på den inre produkten (2).

3. Egenvärdena av matrisen för den kvadratiske formen

$$Q(\mathbf{x}) = -7x_1^2 - x_2^2 - 7x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

kan beräknas till -9 och 3 där egenvärdet -9 har multipliciteten 2. Grafen av ekvationen $Q(\mathbf{x}) = 1$ är därför en två-mantlad rotationshyperboloid. Endast en av symmetriaxlarna skär ytan och denna axel är samtidigt rotationsaxel. Symmetriaxlarna är de räta linjer genom origo som är parallella med principalaxlarna. Bevisa att varje plan som innehåller rotationsaxeln skär hyperboloiden längs en hyperbel.

4. Låt $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ vara en linjär transformation vars samtliga egenvärden är 0. Måste T då vara nollavbildningen för varje värde på n ? Ge bevis eller motexempel.