Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, E. Darpö, A. Neuman,
D. Preve

ÖVNINGSTENTAMEN 1
LINJÄR ALGEBRA MN1
VT 2002

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges, 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar samt 2 EXTRAPROBLEM (max 1 poäng per problem) till vilka endast svar ska ges. För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 5 timmar **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på h är vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$ linjärt beroende?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

   För vilka värden på h ligger $\mathbf{y}$ i värderummet av T (the range of T)?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning (transformation) som definieras av en spegling i linjen $x_1 = x_2$ följd av en spegling i x_2-axeln. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning (transformation) sådan att

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, -x_2 + x_4).$$

   Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$. För vilka värden på a och b tillhör $\mathbf{w}$ både kolonnrummet Col A och nollrummet Nul A?

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vad är dimensionen av nollrummet Nul A?

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \end{bmatrix}$ är radekvivalent med $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   Bestäm en bas för kolonnrummet Col A.

9. $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ har egenvektorn $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vad är motsvarande egenvärde?

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har ett egenvärdet $\lambda = 1$ av multipliciteten 3. Vad är dimensionen av egenrummet hörande till detta egenvärde?

11. För vilka värden på h är $A = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

12. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm h så att egenrummet hörande till egenvärdet $\lambda = 1$ blir två-dimensionellt.

13. Låt $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Skriv $\mathbf{y}$ som summan av en vektor i det linjära höljet Span$\{\mathbf{u}\}$ och en vektor som är ortogonal mot $\mathbf{u}$.

14.
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
   Vilken punkt i det delrum W som spänns av vektorerna $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ ligger närmast $\mathbf{y}$?

15. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{1}$$

Beräkna $< p, q >$ då $p(t) = 1 - t^2$ och $q(t) = 1 + t^2$.

16. Bestäm ett polynom i $\mathbf{P}_2$ som är ortogonalt mot $p(t) = 1 - t^2$ med avseende på den inre produkten (1).

17.
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ är ortogonala egenvektorer till A. Komplettera $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ till en ortogonal bas för $\mathbf{R}^3$ bestående av egenvektorer till A.

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Bestäm en ortogonal matris P så att

$$A = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

19. Grafen av ekvationen $6x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_2^2 = 1$ är en ellips. Bestäm största avståndet till origo från en punkt på ellipsen.

20. Bestäm ett variabelbyte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där P är en ortogonal matris, så att den kvadratiska formen x_1x_2 transformeras till en kvadratisk form utan blandande termer (cross-product terms).

PROBLEM

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ är radekvivalent med $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm rangen av matrisen A, en bas för kolonnrummet Col A samt en bas för nollrummet Nul A.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$.

3. Bevisa att mängden $\mathcal{B} = \{1,\, 2t,\, -2+4t^2\}$, de tre första Hermite polynomen, är en bas för $\mathbf{P}_2$. Bestäm även koordinatvektorn för $\mathbf{p} = 1 - 4t + 8t^2$ med avseende på $\mathcal{B}$.

   Ledning: $\mathbf{P}_2$ har standardbasen $\{1,\, t,\, t^2\}$ så $\dim \mathbf{P}_2 = 3$.

4. För vilka värden på a är grafen av ekvationen $ax_1^2 + 10x_1x_2 + ax_2^2 = 1$ en ellips? Bestäm också ellipsens principalaxlar.

EXTRA PROBLEM

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Finn de komplexa egenvärdena och en bas för varje egenrum i $\mathbf{C}^2$.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Finn en singulär värdeuppdelning $U\Sigma V^T$ (singular value decomposition) av A.

   Ledning: Ett val av U är $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.