Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, E. Darpö, A. Neuman,
D. Preve

ÖVNINGSTENTAMEN 2
LINJÄR ALGEBRA MN1
VT 2002

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges, 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar samt 2 EXTRAPROBLEM (max 1 poäng per problem) till vilka endast svar ska ges. För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 5 timmar **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka värden på h är de tre vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ h \end{bmatrix}$ linjärt beroende?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
   För vilka värden på h ligger $\mathbf{y}$ i värderummet av T (the range of T)?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning (transformation) som definieras av en spegling i x_2-axeln följd av en spegling i linjen $x_1 = x_2$. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ vara en linjär avbildning (transformation) sådan att
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$
   Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} h \\ h \\ h \end{bmatrix}$. För vilka värden på h tillhör $\mathbf{w}$ både kolonnrummet Col A och nollrummet Nul A?

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vad är dimensionen av nollrummet Nul A?

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A?

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ är radekvivalent med $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Bestäm en bas för kolonnrummet Col A.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvektorn $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vad är motsvarande egenvärde?

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ har ett egenvärdet $\lambda = 1$ av multipliciteten 2. Vad är dimensionen av egenrummet hörande till detta egenvärde?

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ har en egenvektor $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm ytterligare en egenvektor $\mathbf{v_2}$ så att $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ blir en bas för $\mathbf{R}^2$.

12. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vad är dimensionen av egenrummet hörande till egenvärdet $\lambda = 1$?

13. Låt $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ h \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. För vilka värden på h tillhör $\mathbf{y}$ det ortogonala komplementet $\mathbf{u}^{\perp}$ av $\mathbf{u}$?

14.
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Vilken punkt i det delrum W som spänns av vektorerna $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ ligger närmast $\mathbf{y}$?

15. $\mathbf{P}_1$ är rummet av polynom av grad högst ett inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_1$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(1)q(1) \tag{1}$$

Beräkna $< p, q >$ då $p(t) = 1$ och $q(t) = t$.

16. Vad är normen av $p(t) = t$, dvs $\sqrt{< p, p >}$, med avseende på den inre produkten (1)?

17. Vad är egenvärdena till $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$?

18. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvärdena $\lambda = \pm 1$. Bestäm en ortogonal matris P så att

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

19. Grafen av ekvationen $2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 = 1$ är en hyperbel. Bestäm minsta avståndet till origo från en punkt på hyperbeln.

20. För vilka värden på a är den kvadratiska formen $x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2$ positivt definit?

PROBLEM

1. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ definierar en linjär avbildning (transformation) $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm n och m, rangen av matrisen A, en bas för kolonnrummet Col A samt en bas för nollrummet Nul A.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$.

3. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{2}$$

Bestäm en ortonormerad bas av polynom med avseende på den inre produkten (2) för $\mathbf{P}_2$.

4. För vilka värden på a är $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ ortogonalt diagonaliserbar? Bestäm för varje sådant a en ortonormerad bas av egenvektorer för $\mathbf{R}^2$.

EXTRA PROBLEM

Se övningstentamen 1