Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson, E. Darpö, A. Neuman,
D. Preve

ÖVNINGSTENTAMEN 3
LINJÄR ALGEBRA MN1
VT 2002

Tentamen består av 20 FRÅGOR OCH UPPGIFTER (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges, 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar samt 2 EXTRAPROBLEM (max 1 poäng per problem) till vilka endast svar ska ges. För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 5 timmar **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR OCH UPPGIFTER

1. För vilka *två* värden på h är vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ h \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} h \\ 1 \end{bmatrix}$ linjärt beroende?

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

   För vilka värden på h ligger $\mathbf{y}$ i värderummet av T (the range of T)?

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning (transformation) som definieras av en spegling i linjen $x_1 = x_2$ följd av en rotation $\pi/2$ radianer moturs. Vad är standardmatrisen av T?

4. Låt $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^4$ vara en linjär avbildning (transformation) sådan att $T(x) = (x, 0, 0, x)$. Vad är standardmatrisen av T?

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. För vilka värden på a och b tillhör $\mathbf{w}$ både kolonnrummet Col A och nollrummet Nul A?

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet Nul A.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vad är dimensionen av nollrummet Nul A?

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är radekvivalent med $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas för kolonnrummet Col A.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vad är motsvarande egenvärde?

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ har ett egenvärdet $\lambda = 1$ av multipliciteten 3. Vad är dimensionen av egenrummet hörande till detta egenvärde?

11. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm ytterligare en egenvektor $\mathbf{v}_2$ så att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ blir en bas för $\mathbf{R}^2$.

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vad är dimensionen av egenrummet hörande till egenvärdet $\lambda = 0$?

13. $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är ett delrum av $\mathbf{R}^2$. Bestäm en bas för $W^{\perp}$.

14.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vilken punkt i det delrum W som spänns av vektorerna $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ ligger närmast $\mathbf{y}$?

15. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{1}$$

Beräkna $< p, q >$ då $p(t) = t(1-t)$ och $q(t) = t(1+t)$.

16. Vad är normen av $p(t) = t(1-t)$, dvs $\sqrt{< p, p >}$ med avseende på den inre produkten (1)?

17.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ är ortogonala egenvektorer till A och svarar mot egenvärdena 10 respektive 1. Vad är det tredje egenvärdet?

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar och

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas för egenrummet svarande mot egenvärdet 0.

19. Arean av ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ är πab. Vad är arean av ellipsen $4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 1$?

20. För vilka värden på a är den kvadratiska formen $ax_1^2 + 2x_1x_2 + ax_2^2$ positivt definit ?

PROBLEM

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ definierar en avbildning (transformation) $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm n och m, rangen av matrisen A, en bas för kolonnrummet Col A samt en bas för nollrummet Nul A.

2. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Bestäm en **ortogonal** matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$.

3. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{2}$$

Låt
$$\delta_0(t) = \frac{t(t-1)}{2},\ \delta_1(t) = (1-t)(1+t),\ \delta_2(t) = \frac{t(t+1)}{2}.$$
$\{\delta_0(t), \delta_1(t), \delta_2(t)\}$ är en ortonormerad bas för $\mathbf{P}_2$. Låt $p(t)$ vara ett godtyckligt polynom i $\mathbf{P}_2$. Beräkna koordinaterna för $p(t)$ med avseende på basen $\{\delta_0(t), \delta_1(t), \delta_2(t)\}$.

4. Bestäm ett variabelbyte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där P är en ortogonal matris, så att den kvadratiska formen $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ transformeras till en kvadratisk form utan blandade termer (cross-product terms). Bestäm koordinaterna för de punkter på kurvan $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$ som ligger närmast origo.

EXTRA PROBLEM

Se övningstentamen 1