Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, E. Darpö, A. Neuman
D. Preve

ÖVNINGSTENTAMEN 2
Linjär algebra MN1
VT 2002

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Alla värden på h
2. Alla värden på h
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
5. Alla värden på h
6. dim Nul $A = 0$ (A definierar en avbildning $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$)
7. En bas är t ex $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
8. En bas är t ex $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$
9. 0
10. 1
11. $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ t ex
12. 1
13. $h = 1$
14. $\mathbf{v}_1$
15. 0
16. $\sqrt{2}$
17. 1 och 0

18. $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

20 $-1 < a < 1$ (Egenvärdena $\lambda = 1 \pm a$ skall båda vara positiva)

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är radekvivalent med $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $n = 2$ och $m = 4$, rank $A = 1$,

   en bas för Col A är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och en bas för Nul A är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. Beräkning ger $A\mathbf{v_1} = 2\mathbf{v_1}$, $A\mathbf{v_2} = 1\mathbf{v_2}$, $A\mathbf{v_3} = 0\mathbf{v_3}$. A har alltså de olika egenvärdena $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 0$. Vi ser att $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ och $\mathbf{v_3}$ är ortogonala som de måste vara.
   $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Inversen $P^{-1} = P^T$.

3. Standardbasen för $\mathbf{P}_2$ är $1, t, t^2$. Vi ser direkt att exempelvis är t och t^2 ortogonala. Då kan vi lätt beräkna den ortogonala projektionen $\hat{1}$ av 1 på det delrum som spänns av t och t^2.
   $$\hat{1} = \frac{< 1, t >}{< t, t >} t + \frac{< 1, t^2 >}{< t^2, t^2 >} t^2 = t^2.$$
   Alltså är $1 - \hat{1} = 1 - t^2$ ortogonal mot t och t^2. Eftersom dessa tre polynom är ortogonala är de en bas för $\mathbf{P}_2$. En ortonormerad bas är $1 - t^2$, $\frac{1}{\sqrt{2}} t$, $\frac{1}{\sqrt{2}} t^2$.

4. Eftersom matrisen är symmetrisk för alla a är den ortogonalt diagonaliserbar för alla a. Man ser direkt att $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor som svarar mot egenvärdet $\lambda_1 = 1 + a$ och att $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor som svara mot $\lambda_1 = 1 - a$. En ortonormerad bas av egenvektorer för alla a är alltså $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.