Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, E. Darpö, A. Neuman
D. Preve

ÖVNINGSTENTAMEN 3
Linjär algebra MN1
VT 2002

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $h = \pm 1$ Sätt $\begin{bmatrix} 1 \\ h \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} h \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta ger $\begin{cases} 1 = kh \\ h = k \end{cases}$, dvs $1 = h^2$.

2. Alla h

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Alla värden på a och b för vilka $a = b$

6. En bas är t ex $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. 6

8. En bas är t ex $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

9. 3

10. 2

11. T ex $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

12. 1

13. T ex $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

15. 0

16. 2

17. 1 Bestäm först en tredje egenvektor ortogonal mot $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$, t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ Tredje kolonnen i P.

19. $\pi \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{3}}$

20. $a > 1$

1. $n = 4$, $m = 2$, rank $A = 1$, en bas för Col A är tex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och en skojig bas för Nul A är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som till och med är ortogonal.

2. Beräkning ger $A\mathbf{v_1} = 0\mathbf{v_1}$, $A\mathbf{v_2} = 9\mathbf{v_2}$, $A\mathbf{v_3} = 9\mathbf{v_3}$. A har alltså ett egenvärde $\lambda = 0$ av multiplicitet 1 och ett egenvärde $\lambda = 9$ av multiplicitet 2. $\mathbf{v_2}$ och $\mathbf{v_3}$ är inte ortogonala. En vektor i egenrummet $E(9)$ som är ortogonal mot t ex $\mathbf{v_3}$ kan man få genom vektorprodukten $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$. $P = \begin{bmatrix} 2/3 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 1/3 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ -2/3 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$. Inversen $P^{-1} = P^T$.

3. Eftersom δ_0, δ_1, δ_2 är en ortonormerad bas ges koordinaterna av $< p(t), \delta_k(t) >= p(a_k)$ där $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

4. Kvadratiska formens matris $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Egenvärdena är 4 och 2. $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Den nya kvadratiska formen är $\mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 4y_1^2 + 2y_2^2$. De punkter på ellipsen $4y_1^2 + 2y_2^2 = 1$ som ligger närmast origo är $(\pm\frac{1}{2}, 0)$ i y_1y_2-systemet. Dessa svarar mot $P\begin{bmatrix} \pm 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ dvs $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ och $(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$ i x_1x_2-systemet.