UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
T. Erlandsson

Prov i matematik
ANALYS MN2
Fristående kurs
1998-12-11

Skrivtid: 08.00-13.00

Hjälpmedel: En och endast en valfri lärobok i analys, t ex Adams, Calculus (dock endast läroboken); Vretblad, Topologi; Simmons, Differential Equations; lektionsanteckningar, utdelade stenciler, egna anteckningar och lösningar.

Ej tillåtna hjälpmedel: Räknare, formelsamlingar och andra läroböcker än ovan angivna.

Omtentander: Eventuella omtentander som inte tagit med hjälpmedlen ovan antecknar detta på skrivningen.

LYCKA TILL!

1. Visa att funktionen f är differentierbar i origo om

$$f(x,y) = \frac{|x||y|(x^2+y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,,\ x^2+y^2<1$$

genom att använda de grundläggande definitionerna av partiell derivata och differentierbarhet.

2. Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel u. Visa att om $u = \frac{x}{y}$ så satisfierar funktionen

$$z = xf(\frac{x}{y})$$

differentialekvationen

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

3. Beräkna

$$\iint_D (y-4)\,dxdy$$

där D är det område i xy-planet som begränsas av

$$\{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+(y-4)^2 \leq 25\}.$$

4. Låt $P = (x_1, 0)$ och $Q = (x_2, 0)$ vara två punkter på x-axeln i det inre av högra halvplanet, dvs i $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x > 0.\}$ Motivera varför linje-integralen

$$\int_\gamma (\frac{y}{x} + e^y)\,dx + (\ln x + xe^y)\,dy$$

är oberoende av vägen γ i D mellan P och Q. Beräkna linjeintegralen uttryckt i koordinaterna för P och Q.

5. Låt $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ och låt B vara den kropp som begränsas av

disken

$$\{(x,y,z) | x^2 + y^2 \le 9, z = -2\},$$

cylinderytan

$$\{(x,y,z) | x^2 + y^2 = 9, -2 \le z \le 0\}$$

och halvsfären

$$\{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 9, z \ge 0\}.$$

Låt S vara kroppens totala begränsningsyta.
Visa divergenssatsen i detta fall genom att explicit beräkna både

$$\iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV \quad \text{och} \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS.$$

6. Beräkna

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

där C är randen av triangeln med hörn i $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ och C är orienterad moturs sedd från punkten (1,1,1).

7. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma extrempunkterna och extremvärdena av funktionen $f = xy$ under bivillkoret $x + y = 1$. Rita också den räta linjen $x + y = 1$ samt nivåkurvorna $xy = C$. Förklara genom att använda figuren vad det är som karakteriserar de erhållna extrempunkterna.

8. Visa att

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 + \dfrac{x^2}{n^2}}\,dx$$

existerar och bestäm gränsvärdet.

9. Lös differentialekvationen

$$x^2 dy + (y^2 - xy)\, dx = 0, \quad x > 0,\ y \neq 0.$$

10. Betrakta det autonoma systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases}$$

där F och G är kontinuerliga med kontinuerliga partiella derivator i xy-planet och $(0,0)$ är en isolerad kritisk punkt. Det är i allmänhet svårt att avgöra om $(0,0)$ är stabil eller instabil kritisk punkt. Följande resultat kan ibland vara till hjälp:

SATS Den kritiska punkten $(0,0)$ till systemet ovan är instabil om det finns en funktion $E(x,y)$ med egenskaperna:

i) E(x,y) är kontinuerlig med kontinuerliga partiella derivator i någon omgivning av origo

ii) $E(0,0) = 0$

iii) $E(x,y)$ är positivt definit

iv) $(\partial E/\partial x)F + (\partial E/\partial y)G$ är positivt definit.

a) Visa med stöd av satsen att $(0,0)$ är en instabil kritisk punkt för systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy + x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x^2 + y^5 \end{cases}$$

b) Bevisa satsen ovan.

EXTRA PROBLEM

Följden $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ består av funktioner, som är kontinuerliga i $0 \leq x \leq 1$ och i detta intervall går likformigt mot f, då $n \to \infty$. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$