UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
T. Erlandsson

Prov i matematik
ANALYS MN2
Fristående kurs
1999-01-16

Skrivtid: 08.00-13.00

Hjälpmedel: En och endast en valfri lärobok i analys, t ex Adams, Calculus (dock endast läroboken); Vretblad, Topologi; Simmons, Differential Equations; lektionsanteckningar, utdelade stenciler, egna anteckningar och lösningar.

Ej tillåtna hjälpmedel: Räknare, formelsamlingar och andra läroböcker än ovan angivna.

Omtentander: Eventuella omtentander som inte tagit med hjälpmedlen ovan antecknar detta på skrivningen.

LYCKA TILL!

1. Visa att funktionen f är differentierbar i origo om

$$f(x,y) = \frac{|x+y|(x^2+y^2)}{\sqrt{1-|x|-|y|}}\ ,\ x^2+y^2<1$$

genom att använda de grundläggande definitionerna av partiell derivata och differentierbarhet.

2. Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel u. Visa att om $u = xy$ så satisfierar funktionen

$$z = xyf(xy)$$

differentialekvationen

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3. Beräkna

$$\iint_D (x-1)\,dxdy$$

där D är det område i xy-planet som begränsas av

$$\{x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 4-(x-1)^2\}.$$

4. Låt $P = (x_1, x_1, 1)$ och $Q = (x_2, x_2, 1)$ vara två punkter på linjen

$$x = y, z = 1.$$

Motivera varför linjeintegralen

$$\int_\gamma \frac{2x}{z}\,dx + \frac{2y}{z}\,dy - \frac{x^2+y^2}{z^2}\,dz$$

är oberoende av vägen γ mellan P och Q om γ i hela sin utsträckning ligger i det inre av övre halvrummet $\mathbf{H}$, dvs i $\mathbf{H} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | z > 0\}$. Beräkna linjeintegralen uttryckt i koordinaterna för P och Q.

5. Låt $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ och låt B vara den kropp som begränsas av

sidoytorna av parallellepipeden

$$\{(x,y,z) | -2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\},$$

och cylinderytan

$$\{(x,y,z) | x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1\}.$$

Låt S vara kroppens totala begränsningsyta.
Visa divergenssatsen i detta fall genom att explicit beräkna både

$$\iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV \quad \text{och} \quad \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

6. Beräkna

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

där C är en cirkel med radien 1 i planet $x+y+z=1$ om cirkeln är orienterad moturs sedd från punkten (1,1,1).

7. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma största möjliga arean av en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna och som är inskriven i ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

8. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{xe^{-x^2}}{1+e^{x/n}}\,dx$$

existerar och bestäm gränsvärdet.

9. Visa att substitutionen $y = zx^{-1/2}$ gör differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - xy^2}{2x^2y}$$

separabel. Lös också ekvationen.

10. Betrakta det autonoma systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}$$

där F och G är kontinuerliga med kontinuerliga partiella derivator i xy-planet och $(0, 0)$ är en isolerad kritisk punkt. Det är i allmänhet svårt att avgöra om $(0, 0)$ är stabil eller instabil kritisk punkt. Följande resultat kan ibland vara till hjälp:

SATS Den kritiska punkten $(0, 0)$ till systemet ovan är instabil om det finns en funktion $E(x, y)$ med egenskaperna:

i) $E(x, y)$ är kontinuerlig med kontinuerliga partiella derivator i någon omgivning av origo

ii) $E(0, 0) = 0$

iii) varje cirkel med centrum i $(0, 0)$ innehåller åtminstone en punkt där $E(x, y)$ är positiv

iv) $(\partial E/\partial x)F + (\partial E/\partial y)G$ är positivt definit.

a) Visa med stöd av satsen att $(0, 0)$ är en instabil kritisk punkt för systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy + x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y \end{cases}$$

b) Bevisa satsen ovan.