UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
T. Erlandsson

Övningstentamen 1
ANALYS MN2
Fristående kurs
1998-12-02

1. Visa att f är differentierbar i origo om

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \quad \text{då} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{och} \quad f(0,0)=0.$$

2. Låt $f = f(u)$ vara en differentierbar funktion av en variabel u. Visa att om

$$u = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{så satisfierar} \quad f\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \neq (0,0)$$

differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

-

3. Beräkna

$$\iint_D x\,dxdy$$

där D är det område i xy-planet som definieras av

$$\{x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq -x^2+x+2\}.$$

4. Låt P och Q vara två punkter i planet. Motivera varför linjeintegralen

$$\int_\gamma -y\sin(x+y)dx + (\cos(x+y) - y\sin(x+y))dy$$

är oberoende av vägen γ mellan P och Q. Beräkna linjeintegralen då $P = (0,0)$ och $Q = (\pi/4, \pi/4)$.

5. Låt

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

och S den totala begränsningsytan av kroppen

$$D = \{(x,y,z) | 0 \leq x^2+y^2 \leq 9, \quad 0 \leq z \leq 5\},$$

som är en solid cylinder med radien 3 och höjden 5. Visa divergenssatsen i detta fall genom att explicit beräkna både $\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$ och $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

V.G.V!

6. Låt ytan S vara den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför planet $z = 0$. Låt C vara skärningskurvan, orienterad moturs sedd från den positiva änden av z-axeln i riktning mot origo, och låt

$$\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}.$$

Visa Stokes sats i detta fall genom att explicit beräkna

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{och} \quad \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

var för sig.

7. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma extrempunkterna och extremvärdena av funktionen $f = x^2 - y^2$ under bivillkoret

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Skissera också nivåkurvorna $x^2 - y^2 = C$ och ellipsen $x^2/9 + y^2/4 = 1$ i ett koordinatsystem. Förklara genom att använda figuren vad det är som karakteriserar de erhållna extrempunkterna.

8. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(x + e^{x/n})^2}$$

existerar och bestäm gränsvärdet.

9. Lös differentialekvationen

$$x dy = (y + x \cos^2 \frac{y}{x})\, dx, \quad x > 0.$$

10. Visa att $(0, 0)$ är en isolerad asymptotiskt stabil kritisk punkt för systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x^3 + x^2 y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -x^3 - y^3 \end{cases}$$