UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
T. Erlandsson

Övningstentamen 2
ANALYS MN2
Fristående kurs
1998-12-02

1. Visa att f är differentierbar i origo om

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{då} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{och} \quad f(0,0)=0.$$

2. Låt $f = f(u)$ vara en differentierbar funktion av en variabel u. Visa att om $u = xy$ så satisfierar $f(xy)$ differentialekvationen

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

3. Beräkna

$$\iint_D x \, dx dy$$

där D är det område i xy-planet som begränsas av

$$\{x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + (y+1)^2 \leq 4\}.$$

4. Låt $P = (x_1, y_1)$ och $Q = (x_2, y_2)$ vara två punkter i det inre av första kvadranten, dvs i $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x > 0,\, y > 0.\}$ Motivera varför linjeintegralen

$$\int_\gamma (\ln y + \frac{y}{x})\, dx + (\ln x + \frac{x}{y})\, dy$$

är oberoende av vägen γ i D mellan P och Q. Beräkna linjeintegralen uttryckt i koordinaterna för P och Q.

5. Låt

$$\mathbf{F} = 2xy\,\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} + 2zx\,\mathbf{k}$$

och S den totala begränsningsytan av kroppen

$$D = \{(x,y,z) | 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1\},$$

som är en solid enhetskub. Visa divergenssatsen i detta fall genom att explicit beräkna både $\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$ och $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

V.G.V!

6. Beräkna

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ och C är skärningskurvan mellan planet $z = 2x + 3y$ och cylindern $x^2 + y^2 = 12$, orienterad moturs sedd från positiva änden av $z-$axeln i riktning mot origo.

7. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma extrempunkterna och extremvärdena av funktionen $f = x^2/9 + y^2/4$ under bivillkoret

$$xy = 1.$$

Skissera också nivåkurvorna $x^2/9+y^2/4 = C$ och de båda grenarna av kurvan $xy = 1$ i ett koordinatsystem. Förklara genom att använda figuren vad det är som karakteriserar de erhållna extrempunkterna.

8. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2/n^2}}{x^2+1} dx$$

existerar och bestäm gränsvärdet.

9. Lös differentialekvationen

$$xdy = (\sqrt{x^2 - y^2} + y)\, dx, \quad x > y > 0.$$

10. Systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & y \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -\dfrac{k}{m}x & - & \dfrac{c}{m}y \end{cases}$$

där konstanterna k, m och c är positiva, beskriver rörelsen hos en massa fästad vid en fjäder i ett medium som utövar friktion. Systemets totala energi

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

är en Liapunov funktion som i Simmons används som ett bevis för att $(0, 0)$ är en isolerad stabil kritisk punkt. Konstruera en annan Liapunov funktion för systemet som kan användas som bevis för att $(0, 0)$ är en isolerad *asymptotiskt* stabil kritisk punkt för systemet.