

Skrivtid: 9.00-14.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

Maximal poäng på varje problem är 5. För godkänt krävs 18 poäng och för väl godkänt 28 poäng inklusive eventuella bonuspoäng.

1. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - x^2}{e^{x^3} - 1}.$$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - y = x - 1$ för vilka $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3. Beräkna integralerna

$$a) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x(2 + \ln x)} \qquad b) \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx.$$

4. Bestäm största möjliga volymen för den cylinder som bildas då rektangeln med hörn i

$$A = (0, 0), \quad B = (a, 0), \quad C = (a, ae^{-a}), \quad D = (0, ae^{-a}),$$

roterar kring x -axeln, $0 < a < \infty$.

5. Skissera kurvan

$$y = \frac{|x-1|}{x-1} \left(\frac{x^2+1}{x} \right).$$

Bestäm särskilt dess definitionsmängd, asymptoter och lokala extrempunkter.

6. För vilka värden på konstanten a är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^a}$$

konvergent? För vilka a -värden är serien dessutom absolut konvergent?

7. Lös differentialekvationen $y' + (2 \tan x)y = \cos^2 x$, $|x| < \frac{\pi}{2}$.

8. Bestäm de värden på konstanten m för vilka linjen $y = mx + 5$ tangerar kurvan

$$x^2 + y^2 = 9.$$

V.G.V!

Trigonometriska formler

$$\begin{array}{ll}
 \sin 2x = 2 \sin x \cos x & \sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2 \\
 \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x & \cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2 \\
 = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 & \sin x \sin y = (\cos(x - y) - \cos(x + y))/2 \\
 \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \sin x \cos y = (\sin(x + y) + \sin(x - y))/2 \\
 \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y & \cos x \cos y = (\cos(x + y) + \cos(x - y))/2
 \end{array}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \dots$$