

Tentamen består av 20 FRÅGOR (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges och 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.

Skrivtid: 14.00-19.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är integralen $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$?
2. Vad är integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} \, dx$?
3. Vad är integralen $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$?
4. Vad är integralen $\int_0^\infty x e^{-2x^2} \, dx$?
5. Vad är integralen $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$?
6. Vad är integralen $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx$?
7. Vad är lösningen till differentialekvationen $y'' = \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$?
8. Vad är lösningarna till differentialekvationen $y \, dy = \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$?
9. Vad är lösningarna till differentialekvationen $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^2}$?
10. Vad är lösningarna till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = x$?
11. Vad är $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{x}$?
12. Vad är $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}$?
13. $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$ har precis en asymptot. Vilken är asymptoten?

V.G.V!

14. Vad är det minsta värdet av $x^2 \ln x$ på intervallet $0 < x < \infty$?
15. Vad är det största värdet av $\frac{1}{2+x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$?
16. För vilka värden på a konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^a}$?
17. Vad är integralen $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin |x| dx$?
18. Vilka är lösningarna till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = y \frac{1}{x^2}$?
19. Vad är summan av serien $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n$?
20. Vilka är asymptoterna till $y = x^2 e^{-|x|}$?

PROBLEM

1. I triangeln ABC är $A = (0, 0)$ och vinkeln vid $B = (x, 0)$ är rät.

C ligger på kurvan

$$y = \begin{cases} \frac{2}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 4 - 2\sqrt{x}, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Bestäm triangelns maximala area då $0 < x \leq 4$. Motivera noggrant.

2. Skissera kurvan

$$y = \frac{|x|}{1-x}.$$

Bestäm speciellt definitionsmängden samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

3. Beräkna volymen av den rotationskropp som genereras då kurvan

$$y = \ln x, \quad 0 < x \leq 1$$

roterar kring y -axeln.

4. Bevisa att om

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

så är $f'(0) = 0$. Visa också att $f'(x)$ inte är kontinuerlig i $x = 0$.

V.G.V!

Trigonometriska formler

$$\begin{array}{ll}
 \sin 2x = 2 \sin x \cos x & \sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2 \\
 \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x & \cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2 \\
 = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 & \sin x \sin y = (\cos(x - y) - \cos(x + y))/2 \\
 \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \sin x \cos y = (\sin(x + y) + \sin(x - y))/2 \\
 \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y & \cos x \cos y = (\cos(x + y) + \cos(x - y))/2
 \end{array}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots +$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \dots$$