Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, L-Å Lindahl,
B Ivarsson, Y Ameur, K Sigstam

TENTAMEN
ANALYS MN1
2001-01-17

Tentamen består av 20 FRÅGOR (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges och 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är integralen $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$?
2. Vad är integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}} \, dx$?
3. Vad är integralen $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \, dx$?
4. Vad är integralen $\int_0^{\infty} e^{-2x} \, dx$?
5. Vad är integralen $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$?
6. Vad är integralen $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$?
7. Vad är lösningen till differentialekvationen $y'' = 1, \quad y(0) = y'(0) = 1$?
8. Vad är lösningarna till differentialekvationen $\frac{1}{y} \, dy = \sqrt{x} \, dx$?
9. Vad är lösningarna till differentialekvationen $y' - \frac{2}{x} y = x^2$?
10. Vad är lösningarna till differentialekvationen $y' + y = e^{-x}$?
11. Vad är $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$?
12. Vad är $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$?
13. Kurvan $y = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ har precis en asymptot. Vilken är denna?

V.G.V!

14. Vad är det största värdet av x^2e^{-x} på intervallet $0 < x < \infty$?

15. Vad är det största värdet av $\dfrac{1}{x-1}$ på intervallet $2 \leq x \leq 3$?

16. Är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{1}{n}$ konvergent?

17. Vad är integralen $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx$?

18. Vad är den lösning till differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}x^2$ för vilken $y(0) = 1$?

19. Vad är summan av den oändliga serien $1 - \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^4 - (\frac{1}{3})^5 + (\frac{1}{3})^6 + \cdots$?

20. Vilka är asymptoterna till $y = x^2e^{-|x|}$?

PROBLEM

1. Bestäm största värdet av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{8}(x^2 - 6x + 13)\,, & 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

då $0 \le x \le 4$. Motivera noggrant.

2. Skissera kurvan

$$y = \frac{\sqrt{x}}{1-x}.$$

Bestäm speciellt definitionsmängden, eventuella lokala extrempunkter, asymptoter och inflexionspunkter.

Ledning: $y' = \dfrac{x^{1/2} + x^{-1/2}}{2(1-x)^2}$, $\qquad y'' = \dfrac{3x^{1/2} + 6x^{-1/2} - x^{-3/2}}{4(1-x)^3}$

3. Då kurvan

$$y = \ln(1 + \frac{1}{x}),\ \ 0 < x \le 1\,,$$

roterar kring y-axeln genereras en rotationskropp vars volym är

$$2\pi \int_0^1 x \ln(1 + \frac{1}{x})\, dx.$$

Skissera kurvan och beskriv den rotationskropp som har volymen lika med integralen ovan. Beräkna också volymen.

4. Bevisa att om

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \ne 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

så är $f'(0) = f''(0) = 0$. Skissera också kurvan och ange särskilt dess asymptoter och inflexionspunkter.

V.G.V!

Trigonometriska formler

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x & \sin^2(x/2) &= (1-\cos x)/2\\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x & \cos^2(x/2) &= (1+\cos x)/2\\
&= 1-2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 & \sin x\sin y &= (\cos(x-y)-\cos(x+y))/2\\
\sin(x\pm y) &= \sin x\cos y \pm \cos x\sin y & \sin x\cos y &= (\sin(x+y)+\sin(x-y))/2\\
\cos(x\pm y) &= \cos x\cos y \mp \sin x\sin y & \cos x\cos y &= (\cos(x+y)+\cos(x-y))/2
\end{aligned}$$

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\\
\sin^{-1} x &= x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots\\
\tan^{-1} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots +\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \cdots
\end{aligned}$$