

Tentamen består av 20 FRÅGOR (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges och 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.

För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.

Skrivtid: 14.00-19.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är integralen $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$?
2. Vad är integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$?
3. Vad är integralen $\int_{1/e}^1 \frac{1}{x} \, dx$?
4. Vad är integralen $\int_0^{\sqrt{2}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$?
5. Vad är integralen $\int_0^{\infty} x e^{-x} \, dx$?
6. Vad är lösningen till differentialekvationen $y'' = e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$?
7. Vad är lösningen till differentialekvationen $y \, dy = \frac{dx}{x}$, $y(1) = 1$?
8. Vad är lösningen till differentialekvationen $y' + (\cos x) y = \cos x$, $y(0) = 0$?
9. Vad är lösningen till differentialekvationen $y'' - 2y' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$?
10. Vad är lösningen till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$?
11. Vad är $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$?
12. Vad är $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/3} - 1}{x}$?
13. $y = \ln(\ln x)$ har precis en asymptot. Vilken är asymptoten?

V.G.V!

14. $y = x e^{-x}$ har precis en asymptot. Vilken är asymptoten?
15. Vad är det största värdet av $x e^{-\frac{x^2}{2}}$ på intervallet $0 < x < \infty$?
16. Vad är det största värdet av $x(x-1)^2$ på intervallet $0 \leq x \leq 2$?
17. Vad är Maclaurinserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av funktionen $\frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$?
18. Vad är summan av serien $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$?
19. Vad är $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$?
20. Låt k vara ett reellt tal $\neq 0$. Vad är $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{(kx)^2}{x^2}$?

PROBLEM

1. Låt

$$f(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ samt $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Bestäm också funktionens största värde. Motivera noggrant.

2. Skissera kurvan

$$y = \frac{(x-1)^2}{x} = x - 2 + \frac{1}{x}.$$

Bestäm definitionsmängden, eventuella lokala extrempunkter, vertikala och sneda asymptoter samt eventuella inflexionspunkter.

3. Skissera kurvan

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 \leq x < 1.$$

Ange särskilt dess asymptot.

a) Beräkna arean av ytan mellan kurvan och x -axeln i intervallet $0 \leq x < 1$.

b) Beräkna volymen av den rotations kropp som genereras då ytan mellan kurvan och x -axeln i intervallet $0 \leq x < 1$ roterar kring y -axeln.

4. Bevisa att om

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

så är $f'(0) = 0$. Beräkna också $f''(0)$.

V.G.V!

Trigonometriska formler

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x & \sin^2(x/2) &= (1 - \cos x)/2 \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x & \cos^2(x/2) &= (1 + \cos x)/2 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 & \sin x \sin y &= (\cos(x - y) - \cos(x + y))/2 \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \sin x \cos y &= (\sin(x + y) + \sin(x - y))/2 \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y & \cos x \cos y &= (\cos(x + y) + \cos(x - y))/2\end{aligned}$$

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \sin^{-1} x &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \\ \tan^{-1} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \\ (1 + x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \dots\end{aligned}$$