Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, H Avelin
A Pelander, K Sigstam

TENTAMEN
ANALYS MN1
2002-12-13

Tentamen består av 20 FRÅGOR (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges och 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är integralen $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin(x+\frac{\pi}{4})\,dx$?
2. Vad är integralen $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1+(x+\frac{1}{2})^2}\,dx$?
3. Vad är integralen $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$?
4. Vad är integralen $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1+x}\,dx$ uttryckt som $\ln a,\ a \in \mathbf{R}$?
5. Vad är integralen $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x\,dx$?
6. Vad är lösningen till differentialekvationen $y''=0, \quad y'(0)=y(0)=0$?
7. Vad är lösningen på formen $y=f(x)$ till differentialekvationen $y'=e^y, \quad y(0)=0$?
8. Vad är lösningen till differentialekvationen $y'+y=e^{-x}, \quad y(0)=0$?
9. Vad är lösningen till differentialekvationen $y''-y=1, \quad y(0)=y'(0)=0$?
10. Vad är lösningen på formen $y^2=f(x)$ till differentialekvationen
$$2\,y'y=\frac{1+y^2}{1+x}, \quad y(0)=0\,?$$
11. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$?
12. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x((1+\frac{1}{x})^{3/2}-1)$?
13. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$?

V.G.V!

14. $y = \dfrac{\tan^{-1} x}{x}$ har precis en asymptot. Vilken är asymptoten?

15. $y = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+x}$ har precis en asymptot. Vilken är asymptoten?

16. Vad är summan av serien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2})^{2n} = 1 - (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 - (\frac{1}{2})^6 + \ldots$?

17. Med kvottestet kan man bestämma att potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ har konvergensradien lika med 1. För vilka värden på x konvergerar serien?

18. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är Maclaurinserien av funktionen $\dfrac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. Vad är a_n?

19. Summan av den alternerande serien

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

kan beräknas med hjälp av Maclaurinserien av en välkänd funktion. Vad är seriens summa?

20. Maclaurinserien av en viss funktion $f(x)$ börjar med $1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$. Vad är ekvationen för tangenten till funktionen i den punkt på kurvan där $x = 0$?

PROBLEM

1. Skissera kurvan

$$y = \frac{(x-1)^2}{x} = x - 2 + \frac{1}{x}.$$

Bestäm definitionsmängden, eventuella lokala extrempunkter, vertikala, horisontella och sneda asymptoter samt inflexionspunkter.

2. Då kurvan

$$f(x) = xe^{-x}, \ x \geq 0\,,$$

roterar kring x-axeln genereras en rotationskropp vars volym är

$$\pi \int_0^\infty (f(x))^2\, dx.$$

Skissera kurvan och beskriv den rotationskropp som har volymen lika med integralen ovan. Beräkna också volymen.

3. Skissera kurvan

$$f(x) = x^2 \ln \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1.$$

Ange särskilt eventuella extremvärden och inflexionspunkter.

4. Bevisa att om

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

så är $f'(0) = f''(0) = 0$. Skissera också kurvan och ange särskilt dess asymptoter och inflexionspunkter.

V.G.V!

Trigonometriska formler

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$

$\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$

$\sin x \sin y = (\cos(x-y) - \cos(x+y))/2$

$\sin x \cos y = (\sin(x+y) + \sin(x-y))/2$

$\cos x \cos y = (\cos(x+y) + \cos(x-y))/2$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$