Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, H Avelin
A Pelander, K Sigstam

TENTAMEN
ANALYS MN1
2003-01-16

Tentamen består av 20 FRÅGOR (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges och 4 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs 18 poäng. För väl godkänt 28 poäng.
Skrivtid: 14.00-19.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi(x-1))\,dx$?
2. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+(x-1)^2}\,dx$?
3. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx$?
4. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx$?
5. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^2 \tan(x-1)\,dx$?
6. Vad är lösningen till differentialekvationen $y''=1, \quad y'(0)=y(0)=1$?
7. Vad är lösningen på formen $y=f(x)$ till differentialekvationen $y'\,e^y=1, \quad y(0)=1$?
8. Vad är lösningen till differentialekvationen $y'-y=e^x, \quad y(0)=1$?
9. Vad är lösningen till differentialekvationen $y''+y=1, \quad y(0)=y'(0)=1$?
10. Vad är lösningen på formen $y=f(x)$ till differentialekvationen
$$y\,y' = x\frac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(0)=1\,?$$
11. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$?
12. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{3/2}-1}{x^2}$?
13. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$?

V.G.V!

14. $y = \dfrac{\sin^{-1} x}{x^2}$ har precis en asymptot. Vilken är asymptoten?

15. $y = \dfrac{\ln(1 - \sqrt{x})}{1 + x}$ har precis en asymptot. Vilken är asymptoten?

16. Vad är summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$?

17. Med kvottestet kan man bestämma att potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ har konvergensradien lika med 1. För vilka värden på x konvergerar serien?

18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är Maclaurinserien av funktionen $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $|x| < 1$. Vad är a_1 ?

19. Med kvottestet kan man bestämma att potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ har konvergensradien lika med 1. Vad är konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$?

20. Maclaurinserien av en viss funktion $f(x)$ börjar med $\dfrac{1}{2}x^2 + \ldots$. Vad är ekvationen för tangenten till funktionen i den punkt på kurvan där $x = 0$?

PROBLEM

1. Skissera kurvan
$$y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$
Bestäm definitionsmängden, eventuella lokala extrempunkter, asymptoter och inflexionspunkter.

Ledning: $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{2x}{(x-1)^3}$ $\qquad y'' = -\dfrac{4}{(x-1)^3} + \dfrac{6x}{(x-1)^4}$

2. Då kurvan
$$f(x) = \ln\frac{1}{x},\ 0 < x \le 1\,,$$
roterar kring y-axeln genereras en rotationskropp vars volym är
$$2\pi \int_0^1 x\, f(x)\, dx.$$
Skissera kurvan och beskriv den rotationskropp som har volymen lika med integralen ovan. Beräkna också volymen.

3. Bestäm det största värdet av funktionen
$$f(x) = \begin{cases} x \ln^2 x, & 0 < x \le 1, \\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & x > 1 \end{cases}$$
Motivera noggrant.

4. Bevisa att om
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
så är $f'(0) = f''(0) = 0$. Skissera också kurvan och ange särskilt dess asymptoter och inflexionspunkter.

V.G.V!

Trigonometriska formler

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$

$\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$

$\sin x \sin y = (\cos(x-y) - \cos(x+y))/2$

$\sin x \cos y = (\sin(x+y) + \sin(x-y))/2$

$\cos x \cos y = (\cos(x+y) + \cos(x-y))/2$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$