Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

TENTAMEN DEL I
ANALYS MN1
2003-12-12

Tentamen Del I består av 15 FRÅGOR (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges och 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
Tentamen Del II består av 3 problem. Se vidare instruktionerna till Del II.
För godkänt krävs totalt 18 poäng. För väl godkänt totalt 28 poäng.
Skrivtid: 8.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är integralen $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$?
2. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$?
3. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$?
4. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^{3/2}-1}{x^2}$?
5. Vilken är asymptoten till kurvan $y = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$?
6. Vad är lösningen till differentialekvationen $y'' = \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0$?
7. Vad är lösningen till differentialekvationen $y'' + y = 0, \quad y'(0) = y(0) = 0$?
8. Vad är lösningen till differentialekvationen $y'' + y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$?
9. Vad är lösningen till differentialekvationen $y' - 2xy = 2x, \quad y(0) = 0$?
10. Vad är lösningen till differentialekvationen $y' = 2x\,(1+y), \quad y(0) = 0$?

11. Vad är summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$?

12. Med kvottestet kan man bestämma att potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ har konvergensradien lika med 1. För vilka värden på x konvergerar serien?

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ är Maclaurinserien av funktionen $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$. Vad är a_2 ?

14. Vad är konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n x^n$?

15. Maclaurinserien av en viss funktion $f(x)$ börjar med $x+\dfrac{1}{2}x^2+\ldots$. Vad är $f''(0)$?

PROBLEM

1. Skissera kurvan
$$y=\frac{xe^{-x}}{9-2x}.$$
Bestäm definitionsmängden, eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.

Ledning: $\quad y'=\dfrac{2x^2-9x+9}{(9-2x)^2}e^{-x}$

2. Då kurvan
$$f(x)=\frac{1}{x^k},\ 0<x\leq 1\,,$$
roterar kring y-axeln genereras en rotationskropp vars volym är
$$V(k)=2\pi\int_0^1 x\,f(x)\,dx.$$
Bestäm de värden på k för vilka den så genererade rotationskroppen har ändlig volym samt beräkna denna. Skissera också rotationskropparna för $k=-2,-1,0,1,2$ genom att skugga det område i xy-planet som genererar dessa kroppar. Vad är $\displaystyle\lim_{k\to-\infty}V(k)$?

Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
H Avelin, A Pelander, K Sigstam

Tentamen del II
ANALYS MN1
2003-12-12

Problemen är numrerade 4,5,6 och är värda 5 poäng var. På varje problem är du garanterad minst den poäng du skrivit på miniduggan med samma nummer. Din poäng på problem x , $4 \leq x \leq 6$ blir max(poäng på minidugga x, poäng på uppgift x).

4. **På denna uppgift är du redan garanterad minst den poäng du skrivit på minidugga 4 (Integraler).**

   Avgör om följande integral är konvergent, och bestäm i så fall dess värde:

$$\int_0^\infty \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}\, dx.$$

5. **På denna uppgift är du redan garanterad minst den poäng du skrivit på minidugga 5 (Serier).**

   a) Visa att $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$ är konvergent för $p > 1$.

   (1p)

   b) Visa att $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$ är divergent för $p < 1$.

   (2p)

   c) Använd integraltestet för att avgöra om $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ är konvergent eller divergent.

   (2p)

6. **På denna uppgift är du redan garanterad minst den poäng du skrivit på minidugga 6 (Differentialekvationer).**

   Lös differentialekvationen $\quad y'' - 3y' = 1 + e^{3x}$

-Lycka till!!!-

Trigonometriska formler

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin x \sin y = (\cos(x - y) - \cos(x + y))/2$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \sin x \cos y = (\sin(x + y) + \sin(x - y))/2$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = (\cos(x + y) + \cos(x - y))/2$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$