Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

TENTAMEN DEL I
ANALYS MN1
2004-01-15

Tentamen Del I består av 15 FRÅGOR (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges och 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
Tentamen Del II består av 3 problem. Se vidare instruktionerna till Del II.
För godkänt krävs totalt 18 poäng. För väl godkänt totalt 28 poäng.
Skrivtid: 8.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx\,$?
2. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx\,$?
3. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2}\,$?
4. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\cos^2\sqrt{x} - 1}{x}\,$?
5. Vilken är asymptoten till kurvan $y = e^{-1/|x|}\,$?
6. Vilka är lösningarna till differentialekvationen $y'' = \cos x\,$?
7. Vilka är lösningarna till differentialekvationen $y'' - y = 0\,$?
8. Vilka är lösningarna till differentialekvationen $y'' - y = 1\,$?
9. Vilka är lösningarna till differentialekvationen $y' + 2xy = 2x\,$?
10. Vilka är lösningarna på formen $y = f(x)$ till differentialekvationen $xy' = 1 + y\,$?

V.G.V!

11. Vad är summan av serien $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$?

12. Med kvottestet kan man bestämma att potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/4}}$ har konvergensradien lika med 1. För vilka värden på x konvergerar serien?

13. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är Maclaurinserien av funktionen $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $|x| < 1$. Vad är a_2 ?

14. Vad är konvergensradien för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$?

15. Maclaurinserien av en viss funktion $f(x)$ börjar med $x + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$. Vad är $f''(0)$?

PROBLEM

1. Skissera kurvan

$$y = \frac{xe^{-x^2}}{2-x}.$$

Bestäm definitionsmängden, asymptoterna samt x-koordinaterna för de lokala extrempunkterna.

Ledning: $y' = \dfrac{2(x-1)(x^2-x-1)}{(2-x)^2} e^{-x^2}$

2. Då kurvan

$$f(x) = -x \ln x, \; 0 < x \leq 1,$$

roterar kring x-axeln genereras en rotationskropp vars volym är

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 \, dx.$$

Skissera kurvan och beräkna rotationskroppens volym.

Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
H Avelin, A Pelander, K Sigstam

Tentamen del II
ANALYS MN1
2004-01-15

Problemen är numrerade 4,5,6 och är värda 5 poäng var. På varje problem är du garanterad minst den poäng du skrivit på miniduggan med samma nummer. Din poäng på problem x , $4 \leq x \leq 6$ blir max(poäng på minidugga x, poäng på uppgift x).

4. **På denna uppgift är du redan garanterad minst den poäng du skrivit på minidugga 4 (Integraler).**

   Bevisa att integralen
   $$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$$
   är konvergent och bestäm dess värde.

5. **På denna uppgift är du redan garanterad minst den poäng du skrivit på minidugga 5 (Serier).**

   a) Visa att $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ är divergent för $p \leq 1$.

   (2p)

   b) Visa att $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ är konvergent för $p > 1$.

   (3p)

6. **På denna uppgift är du redan garanterad minst den poäng du skrivit på minidugga 6 (Differentialekvationer).**

   Lös differentialekvationen $\quad xy' = 1 + x - y - xy$

-Lycka till!!!-

V.G.V!

Trigonometriska formler

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin x \sin y = (\cos(x-y) - \cos(x+y))/2$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \sin x \cos y = (\sin(x+y) + \sin(x-y))/2$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = (\cos(x+y) + \cos(x-y))/2$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \le x \le 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$