Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

TENTAMEN DEL 1
ANALYS MN1
2004-12-15

Tentamen består av två delar. Del 1 omfattar 15 FRÅGOR (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges och 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. Del 2 består av 2 TEORIFRÅGOR (max 2+3 poäng) samt 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs totalt 18 poäng. För väl godkänt totalt 28 poäng.
Skrivtid: 9.00-14.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx\,$?
2. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx\,$?
3. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$?
4. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^3)^{1/3}-1}{x^3}$?
5. $y = \dfrac{1+\ln^2(1-x)}{1+\ln^2(1+x)}$ har precis en asymptot. Vilken linje är det?
6. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y'' = \sin x, \quad y(0)=1,\, y'(0)=1\,$?
7. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y'' + y = 0, \quad y(0)=1,\, y'(0)=1\,$?
8. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y'' - y = 2, \quad y(0)=1,\, y'(0)=1\,$?
9. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y' + 3x^2y = 3x^2, \quad y(0)=1\,$?
10. Vilken är den lösning $y=f(x)$ som satisfierar differentialekvationen $y\,y' = x, \quad y(0)=1\,$?

11. Låt x_0 vara ett fixt tal sådant att $|x_0| < 1$. Vad är summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} {x_0}^n$?

12. Med kvottestet t ex finner man att potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ har konvergensradien lika med 1. För vilka x konvergerar serien?

13. Vad är konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$?

14. Låt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vara Maclaurins serie av $\displaystyle\frac{1}{(1-x^2)^3}$. Vad är a_2 ?

15. Maclaurins serie av e^{-t^2} är $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$. Vad är Maclaurins serie av $E(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$?

PROBLEM

1. Skissera kurvan
$$y = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$
Bestäm definitionsmängden samt undersök särskilt nollställen, asymptoter, lokala extrempunkter och inflexionspunkter.

2. Då kurvan
$$f(x) = -x^k \ln x,\ 0 < x \leq 1\,,$$
roterar kring y-axeln genereras en rotationskropp vars volym är
$$V(k) = 2\pi \int_0^1 x f(x)\, dx.$$
Bestäm de värden på k för vilka den så genererade rotationskroppen har ändlig volym samt beräkna denna.

Skissera också rotationskropparna för $k = -\frac{3}{2}$, 0 och $\frac{3}{2}$ genom att skugga det område i xy-planet som genererar dessa kroppar.

Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
H Avelin, H Uscka-Wehlou

Tentamen del 2
ANALYS MN1
2004-12-15

1. Skriv ner formeln för Taylorpolynomet av grad n för en funktion $f(x)$ kring punkten $x = c$. Beräkna med hjälp av den formlen Taylorpolynomet av grad 4 för $f(x) = e^x$ och $c = 0$.

   (2p)

2. Förklara innebörden av symbolen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Definiera begreppen konvergent serie samt divergent serie.

   (3p)

3. Beräkna integralen
$$\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x} dx.$$

   (5p)

4. Antag att f är definierad i ett intervall I och att $f''(x)$ existerar för alla $x \in I$. Antag att f har tre skilda nollställen i I. Visa att f'' måste ha minst ett nollställe i I. Tips: Du kan tex. använda medelvärdessatsen.

   (5p)

Trigonometriska formler

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin x \sin y = (\cos(x - y) - \cos(x + y))/2$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$	$\sin x \cos y = (\sin(x + y) + \sin(x - y))/2$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	$\cos x \cos y = (\cos(x + y) + \cos(x - y))/2$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}\,x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$