Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

TENTAMEN DEL 1
ANALYS MN1
2005-01-14

Tentamen består av två delar. Del 1 omfattar 15 FRÅGOR (max 1 poäng per fråga) till vilka endast svar ska ges och 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. Del 2 består av 2 TEORIFRÅGOR (max 2+3 poäng) samt 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar.
För godkänt krävs totalt 18 poäng. För väl godkänt totalt 28 poäng.
Skrivtid: 9.00-14.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$?
2. Vad är integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$?
3. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\pi x)}{\pi x}$?
4. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-(x^2/c^2)}}{x^2/c^2}$?
5. $\displaystyle y = \frac{1}{1+\ln^2 x}$ har precis en asymptot. Vilken linje är det?
6. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y'' = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 1$?
7. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y'' + y = 1, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$?
8. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y'' - 2y' + y = 1, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$?
9. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y' - y = 1, \quad y(0) = 1$?
10. Vilken är den lösning $y = f(x)$ som satisfierar differentialekvationen $y\,y' = 1, \quad y(0) = 1$?

11. Låt x_0 vara ett fixt tal sådant att $0 < x_0 < 1$. Vad är summan av serien $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n {x_0}^n$?

12. Vad är konvergensradien för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$?

13. För vilka x konvergerar potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$?

14. Vad är konvergensradien för potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} x^n$?

15. Maclaurins serie av $\int_0^x \ln(1+t)\, dt$ är $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$. Vad är a_2 ?

PROBLEM

1. Skissera kurvan
$$y = \frac{\ln^2 x}{x}.$$
Bestäm definitionsmängden samt undersök särskilt nollställen, asymptoter, lokala extrempunkter och inflexionspunkter.

2. Bevisa att integralen $\int_0^1 x^a e^{-x}\, dx$ konvergerar om och endast om $a > -1$.

Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
H Avelin, H Uscka-Wehlou

Tentamen del 2
ANALYS MN1
2005-01-14

1. Formulera noggrant Integralkalkylens huvudsats (the Fundamental Theorem of Calculus).

(2p)

2. Formulera satserna om konvergens av p-integraler och p-serier. Förklara hur man kan härleda satsen om p-serier ur den om p-integraler.

(3p)

3. Avgör om följande serie är konvergent eller divergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$

(5p)

4. Bestäm ett polynom $p(x)$ av grad högst 3, sådant att följande funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ blir deriverbar för alla x:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ p(x) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1. \end{cases}$$

(5p)

Trigonometriska formler

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin x \sin y = (\cos(x - y) - \cos(x + y))/2$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \sin x \cos y = (\sin(x + y) + \sin(x - y))/2$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = (\cos(x + y) + \cos(x - y))/2$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}\,x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$