

Skrivtid: 8.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

Maximal poäng på varje problem är 5. För godkänt krävs 18 poäng och för väl godkänt 28 poäng inklusive eventuella bonuspoäng.

1. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{e^{x^2} - e^{-x^2}}.$$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + y = x$ för vilka $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3. Beräkna integralerna

$$a) \int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \qquad b) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \tan^{-1} \sqrt{x} dx.$$

4. Bestäm största möjliga volymen för den cylinder som bildas då rektangeln med hörn i

$$A = (0, 0), \quad B = (a, 0), \quad C = (a, \sqrt{1 - a^2}), \quad D = (0, \sqrt{1 - a^2}),$$

roterar kring x -axeln, $0 < a < 1$.

5. Skissera kurvan

$$y = \frac{|x^2 - 1|}{x}.$$

Bestäm särskilt dess definitionsmängd, asymptoter och lokala extrempunkter.

6. Lös differentialekvationen $y' - \frac{1}{x}y = x \cos x$, $x > 0$.

7. Visa att serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1} - n}$$

konvergerar för alla $a > 0$.

8. Bestäm de värden på konstanten a för vilka funktionen f är ett-till-ett (one-to-one), då

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ (1 - a)x + a, & x > 0. \end{cases}$$

V.G.V!

Trigonometriska formler

$$\begin{array}{ll}
 \sin 2x = 2 \sin x \cos x & \sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2 \\
 \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x & \cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2 \\
 = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 & \sin x \sin y = (\cos(x - y) - \cos(x + y))/2 \\
 \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \sin x \cos y = (\sin(x + y) + \sin(x - y))/2 \\
 \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y & \cos x \cos y = (\cos(x + y) + \cos(x - y))/2
 \end{array}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots +$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \dots$$