Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Lars-Åke Lindahl
Björn Ivarsson, Mattias Palmer

Tentamen
Analys MN1
2000-01-13

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)-x^2}{e^{x^3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)+x]\,[\ln(1+x)-x]}{e^{x^3}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^2}{2}+\ldots+x)(x-\frac{x^2}{2}+\ldots-x)}{1+x^3+\frac{(x^3)^2}{2!}+\ldots-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\frac{x^2}{2}+\ldots)(-\frac{x^2}{2}+\ldots)}{x^3+\frac{(x^3)^2}{2!}+\ldots}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+\ldots}{x^3+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\ldots}{1+\ldots}=-1.$$

2. Den homogena ekvationen $y''-y=0$ har karakteristiska ekvationen $r^2-1=0$ med rötterna ± 1 så lösningarna till homogena ekvationen är $y_H=C_1e^x+C_2e^{-x}$. För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y''+y=x-1$ ansättes $y_P=Ax+B$. Derivering och insättning ger $A=-1, B=1$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av
$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x+1.$$
Man finner slutligen att villkoret $y(0)=1, y'(0)=0$ ger $C_1=1/2,\ C_2=-1/2$, så mängden av lösningar består endast av $y=(1/2)e^x-(1/2)e^{-x}-x+1$ som också kan skrivas $y=\sinh x-x+1$.

3.
$$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(2+\ln x)}=\ln(2+\ln x)|_1^{e^2}=\ln(2+2)-\ln 2=\ln(4/2)=\ln 2.$$
$$\int_0^1\ln(1+x^2)\,dx=x\ln(1+x^2)|_0^1-2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=$$
$$=\ln 2-2\int_0^1 dx+2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\ln 2-2+2\tan^{-1}x|_0^1=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}.$$

4. Cylinderns höjd är a och basdisken har radien ae^{-a}.
Cylinderns volym är därför $V(a)=\pi a^3e^{-2a},\quad 0<a<\infty$. Den deriverbara funktionen $V(a)$ uppfyller $V(a)>0$ i $0<a<\infty$ och då $\lim_{a\to 0+}V(a)=0$ och $\lim_{a\to+\infty}V(a)=0$ har funktionen därför ett största värde i det inre av intervallet och det är att söka bland de a för vilka $V'(a)=0$. $V'(a)=\pi a^2(3-2a)e^{-2a}$ och detta ger $V'(a)=0$ då och endast då $a=\dfrac{3}{2}$. Den maximala cylindervolymen är därför $\dfrac{27\pi}{8e^3}$.

5. Definitionsområdet är $-\infty < x < 0, 0 < x < 1, 1 < x < \infty$.
   För $x > 1$ är $y = x + \frac{1}{x}$.
   För $-\infty < x < 0, 0 < x < 1$ är $y = -x - \frac{1}{x}$.

   Vertikal asymptot är $x = 0$. $\lim_{x \to 0+} y = -\infty$. $\lim_{x \to 0-} y = +\infty$.
   För $x > 1$ är $y = x + \frac{1}{x} \to x$ då $x \to \infty$. Linjen $y = x$ är alltså sned asymptot då $x \to +\infty$.
   För $x < 0$ är $y = -x - \frac{1}{x} \to -x$ då $x \to -\infty$. Linjen $y = -x$ är alltså sned asymptot då $x \to -\infty$.
   $\lim y_{x \to 1+} = +2$ och $\lim y_{x \to 1-} = -2$ så kurvan är diskontinuerlig i $x = 1$.
   $y' = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad x > 1$ och $y' = -1 + \frac{1}{x^2}, \quad -\infty < x < 0, 0 < x < 1$.

   Derivatan har alltså ett nollställe i $x = -1$ som måste vara en minimipunkt eftersom $\lim_{x \to 0-} y = \lim_{x \to -\infty} y = +\infty$.

6. För $a < 0$ går seriens termer mot $\pm\infty$ dvs inte mot 0 och serien är alltså divergent. För $a = 0$ är serien $1-1+1-1+\ldots$ och då termerna inte går mot 0 är serien divergent. För $a > 0$ är serien konvergent enligt Alternerande Serie Testet. Serien $\sum_1^\infty |(-1)^{n-1}\frac{1}{n^a}| = \sum_1^\infty \frac{1}{n^a}$ är konvergent för $a > 1$ och divergent för $a \leq 1$. Den givna serien är alltså dessutom absolut konvergent för $a > 1$.

7. En integrerande faktor är $e^{-2\ln\cos x} = e^{\ln(1/\cos^2 x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Efter multiplikation av ekvationen med denna erhålles ekvationen $(\frac{1}{\cos^2 x}y)' = 1$ som ger $\frac{1}{\cos^2 x}y = x + C$ så allmänna lösningen är $y = (x + C)\cos^2 x$.

8. Om vi observerar att kurvan är en cirkel med radien 3 och centrum i origo O kan vi finna en enkel geometrisk lösning.De två tangenterna från $P = (0, 5)$ på $y-$axeln tangerar cirkeln i T. Vinkeln mellan radien OT och tangenten TP är rät så Pythagoras sats ger längden av PT lika med 4. Likformiga trianglar ger $m = \pm\frac{4}{3}$.