Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Lars-Åke Lindahl
Björn Ivarsson, Mattias Palmer

Tentamen
Analys MN1
1999-12-17

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{e^{x^2}-e^{-x^2}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-\frac{(-x^2)^2}{2}+\dots}{\left[1+x^2+\frac{(x^2)^2}{2!}+\dots\right]-\left[1+(-x^2)+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\dots\right]}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+\frac{x^4}{2}+\dots}{2x^2+\dots}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\frac{x^2}{2}+\dots}{2+\dots}=-\frac{1}{2}.$$

2. Den homogena ekvationen $y''+y=0$ har karakteristiska ekvationen $r^2+1=0$ med rötterna $\pm i$ så lösningarna till homogena ekvationen är $y_H=C_1\cos x+C_2\sin x$. För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y''+y=x$ ansättes $y_P=Ax+B$. Derivering och insättning ger $A=1, B=0$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av
$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x.$$
Man finner slutligen att villkoret $y(0)=0,\ y'(0)=1$ ger $C_1=C_2=0$ så mängden av lösningar består endast av $y=x$.
ANM Man ser kanske genast att $y=x$ är en lösning men i problemet krävs att man hittar **alla** lösningar, dvs i detta fall att man visar att $y=x$ är **den enda lösningen.**

3.
$$\int_1^{e^{\pi/2}}\frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx=\sin(\ln x)\big|_1^{e^{\pi/2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$
$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\tan^{-1}\sqrt{x}\,dx=2\sqrt{x}\tan^{-1}\sqrt{x}\big|_0^1-\int_0^1 2\sqrt{x}\,\frac{1}{1+x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2}\,dx=$$
$$=2\tan^{-1}(1)-\ln(1+x)\big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\ln 2.$$

4. Cylinderns höjd är a och basdisken har radien $\sqrt{1-a^2}$.
Cylinderns volym är därför $V(a)=\pi(1-a^2)a,\quad 0<a<1$. Den deriverbara funktionen $V(a)$ uppfyller $V(a)>0$ i $0<a<1$ och i intervallets ändpunkter är $V(a)=0$. Funktionen har därför ett största värde i det inre av intervallet och det är att söka bland de a för vilka $V'(a)=0$. Då $V(a)=\pi(a-a^3)$ finner vi $V'(a)=\pi(1-3a^2)$ och detta ger $V'(a)=0$ då $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ eller $a=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Det enda nollstället till $V'(a)$ i $0<a<1$ är $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ som alltså ger maximala cylindervolymen $\dfrac{2\pi}{9}\sqrt{3}$.

5. Definitionsområdet är $x \neq 0$. Funktionen är udda, dvs $y(-x) = -y(x)$. Det är alltså tillräckligt att studera kurvan för $x > 0$ och sedan spegla den i origo.
För $|x| > 1$ är $y = \dfrac{x^2-1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$. För $|x| < 1$ är $y = -\dfrac{x^2-1}{x} = -x + \dfrac{1}{x}$.
Funktionens nollställen är $x = \pm 1$.
Vertikal asymptot är $x = 0$. $\lim_{x \to 0+} y = +\infty$. $\lim_{x \to 0-} y = -\infty$.
För $|x| > 1$ är $y = \dfrac{x^2-1}{x} = x - \dfrac{1}{x} \to x$ då $x \to \pm\infty$. Linjen $y = x$ är alltså sned asymptot.

$y' = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, $\quad |x| > 1$ och $y' = -1 - \dfrac{1}{x^2}$, $\quad |x| < 1$.
Derivatan har alltså inga nollställen för $x \neq \pm 1$.

$$y'(1)_- = \lim_{h \to 0-} = \frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \lim_{h \to 0-} = \frac{-(1+h) + \frac{1}{1+h}}{h} = -2.$$

$$y'(1)_+ = \lim_{h \to 0+} = \frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \lim_{h \to 0+} = \frac{+(1+h) - \frac{1}{1+h}}{h} = 2.$$

$x = 1$ är alltså en lokal minimipunkt. Eftersom funktionen är udda följer att $x = -1$ är en lokal maximipunkt.

6. En integrerande faktor är $e^{-\ln x} = e^{\ln(1/x)} = \dfrac{1}{x}$. Efter multiplikation av ekvationen med denna erhålles ekvationen $(\dfrac{1}{x}y)' = \cos x$ som ger $\dfrac{1}{x}y = \sin x + C$ så allmänna lösningen är $y = x \sin x + Cx$.

7. Den givna serien $\sum a_n$ är positiv. Vi jämför med $\sum b_n = \sum \dfrac{1}{n^{a+1}}$, som är konvergent för $a > 0$, och använder "limit comparison".

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{a+1}}{n^{a+1} - n} = \frac{1}{1 - (1/n^a)} \to 1 < \infty, \quad n \to \infty, \quad a > 0.$$

Den givna serien är alltså konvergent.

8. För $a < 0$ är $y = (1-a)x + a$ en rät linje med positiv lutning som skär $y-$axeln mellan $y = -a$ och $y = 0$. En horisontell rät linje mellan $y = -a$ och $y = 0$ skär alltså grafen av f i två punkter och f är alltså inte ett-till-ett.
För $a = 0$ är $f(x) = x$ alla x som är ett-till-ett.
För $0 < a < 1$ är $y = (1-a)x + a$ strikt växande och skär $y-$axeln mellan $y = 0$ och $y = a$. Funktionen f är då ett-till-ett.
För $a = 1$ är $f(x) = 1$ för $x > 0$ och f är inte ett-till-ett.
För $a > 1$ är $y = (1-a)x + a$ strikt avtagande och $\lim_{x \to \infty} y = -\infty$ så en horisontell linje under $x-$axeln måste skära grafen av f i två punkter. Alltså är f inte ett-till-ett.